

# Physikalische Einheiten und Basiswechsel

Florian Oppermann

12. Dezember 2013

## Der Vektorraum der physikalischen Größen

Physikalische Größen mit positivem Vorzeichen bilden mit der Multiplikation als Vektoraddition

$$x \oplus y := x \cdot y \quad \left( \text{z. B. } (1 \text{ kg}) \oplus \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 3 \frac{\text{kg m}}{\text{s}} \right)$$

und der Potenzierung als Multiplikation mit einem Skalar

$$\alpha \odot x := x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \left( \text{z. B. } (-1) \odot (\text{s}) = \frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ Hz} \right)$$

einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Der Nullvektor  $\mathbf{0}$  (d. h.  $\mathbf{0} \oplus x = x \forall x$ ) ist  $\mathbf{0} = 1$  und somit ist  $\ominus x = x^{-1}$ . Es gelten die Vektorraumaxiome (Übung: nachrechnen).

**Beispiel** Die Gleichung

$$1 \text{ eV} \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ C V} \approx 10^{-18,8} \text{ A s V}$$

lautet in Vektorschreibweise

$$\mathbf{0} \oplus \text{eV} \approx 1,6 \ominus (19 \odot 10) \oplus \text{C} \oplus \text{V} \approx (-18,8 \odot 10) \oplus \text{A} \oplus \text{s} \oplus \text{V}.$$

**Bemerkung** Mit der gewöhnlichen Addition zweier Elemente und der Multiplikation mit Zahlen bilden die physikalischen Größen *gleicher Dimension* jeweils ebenfalls einen Vektorraum. Dieser ist nicht mit dem oben definierten zu verwechseln!

## Basen und Basiswechsel

Eine *Basis* dieses Vektorraums ist durch die SI-Basiseinheiten und der 10 gegeben (ohne 10 ließen sich keine von 1 verschiedenen Vorfaktoren darstellen):

$$(10, \text{m}, \text{kg}, \text{s}, \text{A}, \text{K}, \text{mol}, \text{cd})$$

Zur Vereinfachung beschränken wir uns im Folgenden auf den von  $(10, \text{m}, \text{kg}, \text{s})$  aufgespannten Unterraum. Bezüglich dieser Basis gilt:

$$G \approx 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \approx (-10,2 \odot 10) \oplus (3 \odot \text{m}) \ominus \text{kg} \ominus (2 \odot \text{s}) \hat{=} \begin{pmatrix} -10,2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\text{SI}}$$

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ J s} \approx (-34 \odot 10) \oplus \text{kg} \oplus (2 \odot \text{m}) \ominus (2 \odot \text{s}) \oplus \text{s} \hat{=} \begin{pmatrix} -34 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\text{SI}}$$

$$c \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx (8,5 \odot 10) \oplus \text{m} \ominus \text{s} \hat{=} \begin{pmatrix} 8,5 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\text{SI}}$$

Diese drei Werte sind linear unabhängig. Wir können also den Basiswechsel zur Basis  $(10, G, \hbar, c)$  betrachten. Die Basiswechselmatrizen sind

$$T_{\text{SI}}^{\text{nat}} = \begin{pmatrix} 1 & -10,2 & -34 & 8,5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{\text{nat}}^{\text{SI}} = (T_{\text{SI}}^{\text{nat}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 34,85 & 7,65 & 43,35 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

Daraus lässt sich direkt ablesen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{SI}} \hat{=} 1 \text{ m} \hat{=} \begin{pmatrix} 34,85 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}_{\text{nat}} \hat{=} 10^{34,85} \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{SI}} \hat{=} 1 \text{ kg} \hat{=} \begin{pmatrix} 7,65 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{\text{nat}} \hat{=} 10^{7,65} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{SI}} \hat{=} 1 \text{ s} \hat{=} \begin{pmatrix} 43,35 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}_{\text{nat}} \hat{=} 10^{43,35} \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$$

## Weglassen von Konstanten

Wenn Physiker  $G = \hbar = c = 1 (= \mathbf{0})$  schreiben, meinen sie folgendes: Wechsle in die Basis aus natürlichen Einheiten (dabei wird der Zahlwert für jede SI-Einheit gemäß Gleichung (1) mit einem Faktor multipliziert) und lasse dann alle Faktoren  $G, \hbar, c$  unter den Tisch fallen. Eine allgemeine physikalische Größe vereinfacht sich dementsprechend:

$$(\alpha \odot 10) \oplus (\beta \odot G) \oplus (\gamma \odot \hbar) \oplus (\delta \odot c) \rightarrow \alpha \odot 10$$

Es muss jedoch stets sichergestellt sein, dass sich die Koeffizienten  $\beta, \gamma, \delta$  aus dem Zusammenhang rekonstruieren lassen. Dafür genügt es, die physikalische Dimension (beispielsweise in SI-Einheiten) zu kennen (siehe unten).

## Rückweg zu SI-Einheiten

In der Regel möchte man in eine Formel keine Werte in natürlichen Einheiten einsetzen, einerseits weil die Werte meist erst umgerechnet werden müssten, aber auch weil die Interpretation des Ergebnisses nicht leicht fällt. Nach einer Rechnung mit  $G = \hbar = c = 1$  müssen alle Teile einer Gleichung mit geeigneten Faktoren 1 multipliziert werden. Dabei sind die folgenden Regeln zu beachten:

- i) In einer Summe müssen beide Summanden dieselbe Einheit besitzen.
- ii) Beide Seiten einer Gleichung müssen dieselbe Einheit besitzen (üblicherweise ist die SI-Einheit einer Seite bekannt).
- iii) Exponenten (allgemeiner: die Argumente vieler Funktionen) müssen dimensionslos sein.
- iv) Ableitungen haben die inverse Einheit dessen, wonach abgeleitet wird.
- v) Integrale haben die Einheit des Integranden multipliziert mit der Einheit der Integrationsvariablen.

Die Faktoren, mit denen multipliziert wird, bestimmen sich aus den Einheiten, die hinzugefügt/entfernt werden müssen. In Gleichung (1) ist ersichtlich, mit welchem Faktor man welche SI-Basiseinheit erzeugt.

### Beispiele

**1. Relativistischer Impuls** Die linke Seite der Gleichung  $p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}$  hat die Einheit  $\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ . Zunächst wird der Radikant auf eine gemeinsame Einheit gebracht:  $1 - \frac{v^2}{c^2}$  sorgt für einen dimensionslosen Nenner und liefert direkt die richtige Einheit.  $c^2 - v^2$  wäre auch möglich. Dann ist aber die Einheit des Gesamtausdrucks  $\frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}}}{\sqrt{\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}}$ , es fehlt also noch ein Faktor  $c$ . Insgesamt ergibt sich für die beiden Möglichkeiten

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mvc}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

(wobei die dritte Gleichheit offenbar richtig ist).

**2. Relativistische Energie-Impuls-Beziehung** Die Einheiten in der Gleichung  $E^2 = m^2 + p^2$  werden summandenweise untersucht. Links ergibt sich  $J^2 = \left(\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\right)^2 = \text{kg}^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^4$ , rechts fehlt dem  $m^2$ -Term dazu noch ein Faktor  $c^4$ . Die Einheit von  $p^2$  ist  $\left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}}\right)^2$ , es fehlt also ein Faktor  $c^2$ . Insgesamt folgt

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2.$$

**3. Klein-Gordon-Gleichung** Aus der Energie-Impuls-Beziehung kann man in der relativistischen Quantenmechanik die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right) \psi(t, \mathbf{x}) = 0$$

ableiten. Offensichtlich müssen wir nur die Summanden in der Klammer auf eine gemeinsame Einheit bringen, wir wählen  $\frac{1}{\text{m}^2}$ . Die zweite Zeitableitung hat die Einheit  $\frac{1}{\text{s}^2}$ , so dass  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  die gewünschte Einheit besitzt.  $\nabla^2$  ist eine Summe von zweiten Ortsableitungen, hat also die richtige Einheit. Den Summanden  $m^2$  müssen wir mit einer Konstanten mit Einheit  $\frac{1}{\text{kg}^2 \text{m}^2}$  multiplizieren. Nach Gleichung (1) ist

$$\frac{G}{\hbar c} \frac{c^3}{G \hbar} = \frac{c^2}{\hbar^2}$$

so eine Konstante. Also lautet die Klein-Gordon-Gleichung in SI-Einheiten

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(t, \mathbf{x}) = 0.$$

- 4. Schwarzschildradius** Die einfache Gleichung  $R_S = 2M$  definiert den *Schwarzschildradius* eines Sterns mit Masse  $M$ , hat also die Einheit m. Wir müssen demnach die rechte Seite der Gleichung mit etwas mit der Einheit  $\frac{\text{m}}{\text{kg}}$  multiplizieren. Nach Gleichung (1) können wir den Faktor

$$\frac{\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}}{\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}} = \sqrt{\frac{G^2}{c^4}} = \frac{G}{c^2}$$

verwenden und erhalten damit

$$R_S = \frac{2MG}{c^2}.$$

- 5. Impulsraumdarstellung einer Wellenfunktion** In der Quantenmechanik interpretiert man das Betragsquadrat einer (Orts-)Wellenfunktion  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  als Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, d. h.  $\int_V d^3 \mathbf{x} |\psi(\mathbf{x})|^2$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen im Volumen  $V$  anzutreffen. Oft ist es nützlich, die Wellenfunktion im Impulsraum zu beschreiben – das geht durch Fouriertransformation.

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{p} \hat{\psi}(\mathbf{p}) e^{2\pi i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

Welche Faktoren  $G, \hbar, c$  fehlen, wenn  $|\hat{\psi}(\mathbf{p})|^2$  als Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum interpretiert werden soll?

Zunächst betrachten wir den Exponenten:  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$  hat die Einheit  $\frac{\text{kg m}}{\text{s}} \cdot \text{m}$ , soll aber dimensionslos sein. Da  $\hbar$  die Einheit  $\text{J s} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$  hat, müssen wir gerade dadurch teilen. Oft sieht man deshalb auch  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$  anstelle von  $\mathbf{p}$ .

Die linke Seite der Gleichung hat die Einheit  $\text{m}^{-3/2}$ , die Funktion  $\hat{\psi}$  liefert Werte der Einheit  $\left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}}\right)^{-3/2}$ , insgesamt ist die Einheit der rechten Seite also

$$\underbrace{\left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}}\right)^3}_{d^3 \mathbf{p}} \cdot \left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}}\right)^{-3/2} = \left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}}\right)^{3/2} = \left(\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}\right)^{3/2} \cdot \text{m}^{-3/2}$$

und es wird ein Faktor  $\hbar^{-3/2}$  benötigt. Es gilt also insgesamt:

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{p} \hat{\psi}(\mathbf{p}) e^{2\pi i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar} = \hbar^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{k} \hat{\psi}(\hbar \mathbf{k}) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$