

# Themenliste und Zusammenfassung

## ART & Kosmologie und Theorie der schwarzen Löcher

Stand: 16. Juli 2014

## 1 Differentialgeometrie

### 1.1 (Semi-)Riemann'sche Mannigfaltigkeiten

Eine (Semi-)Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  mit einem *metrischen Tensor*, d. h. einer Funktion  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , die differenzierbar von  $p$  abhängt und die

$$\begin{aligned}g_p(aX + bY, Z) &= a(p) g_p(X, Z) + b(p) g_p(Y, Z) \\g_p(X, Y) &= g_p(Y, X) \\ \nexists X \in T_p M : X \neq 0 \text{ und } g_p(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_p M &\iff \det g \neq 0\end{aligned}$$

für alle  $X, Y, Z \in T_p M$  und  $a, b \in C^\infty(M)$  erfüllt.

### 1.2 Metrik von $S^2$

Die Metrik von  $R \cdot S^2$  (Sphäre mit Radius  $R$ ) lautet in sphärischen Polarkoordinaten

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = R^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

bzw.

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

und ist an den Polen degeneriert/ausgeartet ( $\det g = 0$ ). Dies ist ein Effekt der Koordinatenwahl. In am Nordpol stereographisch projizierten Koordinaten ist die Metrik

$$g = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{4R^2}\right)^2} (dx^2 + dy^2)$$

für alle endlichen  $x, y$  (also überall bis auf den Nordpol) nicht ausgeartet.

### 1.3 (Tangential-)Vektoren/Kovektoren

Tangentialvektoren wirken auf Funktionen wie Richtungsableitungen in Richtung einer Kurve. Für ein lokales Koordinatensystem  $x = (x^1, \dots, x^n)$  ist eine Basis des Tangentialraums durch die partiellen Ableitungen  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  gegeben.

Der Kotangentialraum ist der Dualraum des Tangentialraums, die duale Basis wird mit  $\{dx^i\}$  bezeichnet.

Sind ein Vektor  $u = u^m \partial_m = u'^m \partial'_m$  und ein Kovektor  $\omega = \omega_m dx^m = \omega'_m dx'^m$  in zwei lokalen Koordinatensystemen  $x, x'$  gegeben, erfüllen die Komponenten die Transformationsformeln

$$u'^m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} u^n \quad (\text{kontravariant})$$

$$\omega'_m = \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} \omega_n \quad (\text{kovariant})$$

## 1.4 Tensoren

Ein  $(r, s)$ -Tensor  $T$  ist eine multilineare Abbildung, die  $r$  Kovektoren und  $s$  Vektoren eine reelle Zahl zuordnet, d. h. eine Abbildung

$$T : \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_r \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_s \rightarrow \mathbb{R},$$

die in jedem Argument linear ist.

Mit Hilfe des Tensorproduktes  $T \otimes T'$  eines  $(r, s)$ -Tensors  $T$  und eines  $(r', s')$ -Tensors  $T'$ , das für Vektoren  $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_{s'} \in T_p M$  und Kovektoren  $\omega^1, \dots, \omega^r, \gamma^1, \dots, \gamma^{r'} \in T_p^* M$  durch

$$(T \otimes T')(\omega^1, \dots, \omega^r, \gamma^1, \dots, \gamma^{r'}, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_{s'}) = T(\omega^1, \dots, \omega^r, u_1, \dots, u_s) T'(\gamma^1, \dots, \gamma^{r'}, v_1, \dots, v_{s'})$$

definiert ist, sieht man, dass für Basen  $\{e_a\}, \{e^a\}$  von  $T_p M$  bzw.  $T_p^* M$

$$\{e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes \dots \otimes e^{b_s}\}$$

eine Basis für den Raum der  $(r, s)$ -Tensoren ist. (Oft werden die Tensorproduktzeichen weggelassen.) Bezüglich dieser Basis ist

$$T = T_{b_1 \dots b_s}{}^{a_1 \dots a_r} e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes \dots \otimes e^{b_s} \quad (1)$$

mit

$$T_{b_1 \dots b_s}{}^{a_1 \dots a_r} = T(e^{a_1}, \dots, e^{a_r}, e_{b_1}, \dots, e_{b_s}).$$

Dabei wurde  $(T_p^* M)^* = T_p M$  mittels  $v(\omega) := \omega(v)$  identifiziert. Die Komponenten des Tensors transformieren wie vom Indexbild angegeben, d. h.  $r$ -fach kontravariant und  $s$ -fach kovariant:

$$T'_{b'_1 \dots b'_s}{}^{a'_1 \dots a'_r} = \frac{\partial x'^{a_1}}{\partial x^{a'_1}} \dots \frac{\partial x'^{a_r}}{\partial x^{a'_r}} \frac{\partial x^{b'_1}}{\partial x^{b_1}} \dots \frac{\partial x^{b'_s}}{\partial x^{b_s}} T_{b_1 \dots b_s}{}^{a_1 \dots a_r}$$

(Summe über alle *gestrichenen* Indizes)

Meistens betrachten wir nicht Tensoren, sondern *Tensorfelder*. Das sind Funktionen, die jedem Punkt  $p$  der Mannigfaltigkeit  $M$  einen Tensor auf dem Tangentialraum  $T_p M$  zuordnen. Tensorfelder lassen sich lokal auch wie in (1) schreiben, wobei nun die Koeffizienten  $T_{b_1 \dots b_s}{}^{a_1 \dots a_r}$  Funktionen der Koordinaten sind.

**Beispiele für Tensoren** Ein Vektorfeld ordnet jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen Tangentialvektor zu, den wir mit einem Element des Dualraums von  $T_p^*M$  identifizieren können. Also ist ein Vektorfeld ein  $(1,0)$ -Tensor(feld). Der metrische Tensor ist ein Skalarprodukt auf dem Tangentialraum, also ein symmetrischer  $(0,2)$ -Tensor. Eine Differentialform vom Grad  $k$  ist ein alternierendes  $(0,k)$ -Tensorfeld.

**Hoch-/Herunterziehen von Indizes** Mit Hilfe der Metrik lassen sich Vektoren und Kovektoren miteinander identifizieren. Zunächst sei  $(g^{\mu\nu})$  die zu  $(g_{\mu\nu})$  inverse Matrix (die nach Voraussetzung  $\det g \neq 0$  existiert), d. h.  $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ . Für einen Vektor  $v = v^\mu \partial_\mu$  ist die Abbildung

$$g(v, \cdot) = g_{\mu\nu}v^\mu dx^\nu$$

ein Kovektor  $v_\nu dx^\nu$  mit  $v_\nu = g_{\mu\nu}v^\mu$ . Man kann sich überlegen, dass  $g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$  ein  $(2,0)$ -Tensor ist (*inverser metrischer Tensor*). Dann wird analog für einen Kovektor  $v_\mu dx^\mu$  ein Vektor  $v^\nu \partial_\nu$  mit  $v^\nu = g^{\mu\nu}v_\mu$  definiert. Auf gleiche Art und Weise kann man für beliebige Tensoren Indizes hoch- bzw. herunterziehen.

$$\begin{aligned} T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_{t-1} a_t a_{t+1} \dots a_r} &= g_{a_t c} T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_{t-1} c a_{t+1} \dots a_r} \\ T_{b_1 \dots b_{t-1} b_t b_{t+1} \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} &= g^{b_t c} T_{b_1 \dots b_{t-1} c b_{t+1} \dots b_s}^{a_1 \dots a_r} \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Dragon vertauscht die Rollen von  $r$  und  $s$ .

## 1.5 Länge einer Kurve

Ist  $x(\lambda)$  ( $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ ) die Parametrisierung einer Kurve  $\Gamma$  in lokalen Koordinaten, so ist  $\frac{dx}{d\lambda}$  für jedes  $\lambda$  ein Tangentialvektor (genauer: eine Basisdarstellung eines Tangentialvektors bezüglich der von  $x$  induzierten Tangentialraumbasis) an  $x(\lambda)$ . Das (reelle!) Integral

$$L = \int_{\underline{\lambda}}^{\bar{\lambda}} \sqrt{\left| g(x(\lambda)) \left( \frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda} \right) \right|} d\lambda = \int_{\underline{\lambda}}^{\bar{\lambda}} \sqrt{\left| g_{\mu\nu}(x(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right|} d\lambda \quad (2)$$

ist reparametrisierungsinvariant und definiert die *Länge der Kurve*  $\Gamma$ .

Im euklidischen Fall  $(g_{\mu\nu}) = \mathbf{1}_n$  erhält man die bekannte Formel

$$L = \int_{\underline{\lambda}}^{\bar{\lambda}} \|\dot{x}(\lambda)\| d\lambda.$$

## 1.6 Volumenform

Für den Betrag  $\mathbf{g}$  der Determinante der Matrix  $(g_{\mu\nu})$  gilt die Transformationsformel  $\mathbf{g}' = \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 \mathbf{g}$ , deshalb ist die Differentialform

$$\omega = \sqrt{\mathbf{g}} dx^1 \dots dx^n = \sqrt{\mathbf{g}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{\mathbf{g}'} dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^m$$

für orientierungstreue Transformationen ( $\det \frac{\partial x}{\partial x'} > 0$ ) koordinatenunabhängig. Wird ein Gebiet  $U \subset M$  durch Parameter  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschrieben, d. h.  $x(\Omega) = U$ , so ist sein Volumen

$$\text{Vol}(U) := \int_U \omega := \int_\Omega \sqrt{\mathbf{g}(x)} dx^1 \dots dx^n,$$

wobei das letzte Integral durch gewöhnliche Integration im  $\mathbb{R}^n$  berechnet werden kann.

## 1.7 Christoffelsymbole

Die Christoffelsymbole können mit

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \quad (3)$$

aus der Metrik berechnet werden. Sie transformieren im Allgemeinen *nicht* tensoriell, sondern gemäß

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}.$$

Für einen torsionsfreien Zusammenhang (siehe 1.10) sind die Christoffelsymbole symmetrisch

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}.$$

Für den Levi-Civita-Zusammenhang können stets lokale Koordinaten gefunden werden, so dass die Christoffelsymbole an einem Punkt verschwinden.

## 1.8 Kovariante Ableitung

Mit Hilfe der Christoffelsymbole wird die kovariante Ableitung  $\nabla_X$  in Richtung eines Vektorfeldes  $X$  definiert. Für den Fall  $X = \partial_{\mu}$  schreibt man kurz  $\nabla_{\mu}$ . Für  $X = X^{\mu}\partial_{\mu}$  ist  $\nabla_X = X^{\mu}\nabla_{\mu}$ .

Die kovariante Ableitung wirkt auf Skalarfelder  $f$ , Vektorfelder  $X = X^{\mu}\partial_{\mu}$ , Kovektorfelder  $\omega = \omega_{\mu}dx^{\mu}$  und Tensoren  $T = T_{b_1\dots b_r}{}^{a_1\dots a_s}e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_s} \otimes e^{b_1} \otimes \dots \otimes e^{b_r}$  wie folgt.

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}f &= \partial_{\mu}f \\ \nabla_{\mu}X^{\nu} &= \partial_{\mu}X^{\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}X^{\rho} \\ \nabla_{\mu}\omega_{\nu} &= \partial_{\mu}\omega_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\omega_{\rho} \\ \nabla_{\mu}T_{b_1\dots b_s}{}^{a_1\dots a_r} &= \partial_{\mu}T_{b_1\dots b_s}{}^{a_1\dots a_r} + \Gamma_{\mu c}^{a_1}T_{b_1\dots b_s}{}^{c a_2\dots a_r} + \dots + \Gamma_{\mu c}^{a_r}T_{b_1\dots b_s}{}^{a_1\dots a_{r-1} c} \\ &\quad - \Gamma_{\mu b_1}^c T_{c b_2\dots b_s}{}^{a_1\dots a_r} - \dots - \Gamma_{\mu b_s}^c T_{b_1\dots b_{s-1} c}{}^{a_1\dots a_r} \end{aligned}$$

Sie beschreibt die Änderung eines Tensorfeldes bei Parallelverschiebung in Richtung  $X$  (gegenüber dem verschleppten Tensorfeld). Diese setzt sich zusammen aus einer Änderung der Koeffizienten und einer Änderung der Basis des Tangentialraums, die aus der Krümmung (der Koordinaten) herrührt.

## 1.9 Paralleltransport

Ein Vektorfeld  $V$  heißt Paralleltransport entlang einer Kurve  $x(\lambda)$ , falls

$$\nabla_{\dot{x}}V = 0 \iff \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\partial_{\mu}V^{\nu} + \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\Gamma_{\mu\rho}^{\nu}V^{\rho} = 0$$

entlang der Kurve gilt.

## 1.10 Levi-Civita-Zusammenhang

Man kann Paralleltransport und kovariante Ableitung allgemeiner definieren (siehe z. B. Dragon). Dann sind die Christoffelsymbole zunächst allgemeine Funktionen der Koordinaten (und nicht wie oben durch die Metrik definiert). Der *Hauptsatz der Riemann'schen Geometrie* besagt, dass es genau einen *Zusammenhang* (d. h. eine Wahl der Christoffelsymbole) gibt, der torsionsfrei (symmetrisch),  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ , und mit der Metrik verträglich,  $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$ , ist. Diese beiden Bedingungen führen auf die Gleichung (3).

## 1.11 Geodäten

Geodäten sind Kurven, deren Tangenten alle parallel sind (d. h. durch Parallelverschiebung an der Kurve selbst auseinander hervorgehen).

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{x}(\lambda)} \dot{x}(\lambda) = 0 &\iff \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu}_{\frac{d}{d\lambda}} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \\ &\iff \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Dies ist die Verallgemeinerung von Geraden im euklidischen Raum, denn dann verschwinden die Christoffelsymbole und die Geodätengleichung (4) wird zur Beschleunigungsfreiheit ( $\equiv$  geradlinige Bewegung).

Man kann mit Variationsrechnung überprüfen, dass Geodäten stationäre Punkte der Länge von Kurven (2) sind (zeitartige Geodäten *maximieren* sie lokal).

## 1.12 Riemann'scher Krümmungstensor

Die Krümmung des Raumes äußert sich darin, dass ein Vektor  $w = w^\mu \partial_\mu$  nach einer Parallelverschiebung entlang einer geschlossenen Kurve nicht notwendigerweise mit sich übereinstimmt. Betrachtet man die Kurve um das infinitesimale Flächenstück, das von  $u = u^\mu \partial_\mu$  und  $v = v^\mu \partial_\mu$  aufgespannt wird, ist die Differenz zwischen verschobenem und ursprünglichem Vektor

$$\delta w^\mu = -u^\rho v^\sigma R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} w^\nu$$

mit dem Riemann'schen Krümmungstensor

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda.$$

Er lässt sich auch vermittels

$$(\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho) v^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} v^\nu$$

durch die kovariante Ableitung definieren (Torsionsfreiheit vorausgesetzt). Koordinatenfrei definiert man gelegentlich den Krümmungstensor als die endomorphismuswertige Zweiform

$$R(u, v)w := (\nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u)w.$$

Obwohl die Christoffelsymbole lokal immer zum Verschwinden gebracht werden können, gilt das für den Krümmungstensor nicht, denn er enthält auch Ableitungen der Christoffelsymbole ( $\equiv$  zweite Ableitungen der Metrik).

Für den „kovariantisierten“<sup>1</sup> Tensor  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\pi} R^\pi{}_{\nu\rho\sigma}$  gelten die folgenden Eigenschaf-

<sup>1</sup>Den Begriff habe ich mir ausgedacht.

ten<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} && \text{(Antisymmetrie in beiden Indexpaaren)} \\
 R_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\rho\sigma\nu\mu} && \text{(Symmetrie bei Vertauschung der Indexpaare)} \\
 R_{\mu[\nu\rho\sigma]} &= \sum_{\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 && \text{(1. Bianchi-Identität)} \\
 R_{\mu\nu[\rho\sigma;\lambda]} &= \sum_{\rho\sigma\lambda} \nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 && \text{(2. Bianchi-Identität)} \tag{5}
 \end{aligned}$$

Mit dem Riemann'schen Krümmungstensor definiert man durch Verjüngung den symmetrischen *Ricci-Tensor*

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$$

und wiederum durch Verjüngung den *Ricci-* oder *Krümmungsskalar*

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

### 1.13 Deviationsgleichung

Ist  $x(\lambda)$  eine Geodäte,  $v = \frac{dx}{d\lambda}$  die Tangente an der Kurve und  $\xi$  ein Verbindungsvektor zu einer benachbarten Geodäte<sup>3</sup>, so wird die Veränderung des Abstandes der Geodäten im torsionsfreien Raum durch die Deviationsgleichung

$$\nabla_v \nabla_v \xi^\mu = R^\mu{}_{\rho\sigma\nu} v^\rho v^\sigma \xi^\nu \tag{6}$$

beschrieben. Im flachen Raum verschwindet diese zweite Ableitung nach dem Kurvenparameter und der Abstand wächst linear.

## 2 Spezielle Relativitätstheorie

### 2.1 Postulate

1. Die Gesetze der Physik sind für alle Beobachter in Inertialsystemen gleich. Es gibt keine Möglichkeit, mit einem Experiment die absolute Geschwindigkeit eines Beobachters zu bestimmen. Physikalische Experimente hängen nicht von der Relativgeschwindigkeit zu unbeteiligten Beobachtern ab.
2. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.

### 2.2 Lorentz-Transformation

In der SRT ist eine allgemeine Koordinatentransformation  $x \rightarrow x'$  ein Element der Poincaré-Gruppe und kann deshalb als

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

<sup>2</sup> $[\nu\rho\sigma]$  und  $\sum_{\nu\rho\sigma}$  stehen für die Summe über alle zyklischen Permutationen der angegebenen Indizes.

<sup>3</sup>Präzise: Der Tangentialvektor einer Verbindungskurve.

mit

$$\Lambda = D_1 \Lambda_v D_2, \quad D_i = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \text{Drehmatrix} \end{array} \right), \quad \Lambda_v = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

geschrieben werden.<sup>4</sup> Dabei ist  $\Lambda_v$  die Transformationsmatrix für den Wechsel in das System eines in  $x$ -Richtung mit Relativgeschwindigkeit  $v$  bewegten Beobachter.

## 2.3 MCRF (momentarily comoving reference frame), Zeitdilatation und Eigenzeit

Zu jedem Punkt der Weltlinie eines Teilchens findet man ein Inertialsystem, in dem das Teilchen momentan im Ursprung ruht, das MCRF. Die Vierergeschwindigkeit ist in diesem System  $v = (1, 0, 0, 0)$ . Bewegt sich das MCRF mit Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Laborsystem, laufen die Uhren langsamer

$$dt_{\text{MCRF}} = \sqrt{1-v^2} dt_{\text{Labor}} \quad (7)$$

(Zeitdilatation). Parametrisiert man die Weltlinie eines Teilchens durch die Zeit  $t$  im Laborsystem, so gilt (7) an jedem Punkt der Weltlinie und die insgesamt vergangene Zeit (*Eigenzeit*) ergibt sich durch Integration

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-v^2},$$

wenn die Uhren bei  $t = t_1$  synchronisiert waren.

Parametrisiert man die Weltlinie des Teilchens durch seine Eigenzeit, kann man durch

$$v = \frac{dx}{d\tau} = \gamma(1, \vec{v})$$

die Vierergeschwindigkeit (und analog durch weiteres Ableiten die Viererbeschleunigung) definieren. Weiterhin ist durch

$$p = mv = (E, \vec{p})$$

der Viererimpuls definiert.

## 2.4 Ideale Flüssigkeiten

Flüssigkeiten dienen als Kontinuumsnäherung: Die Teilchenzahl ist so groß, dass man die Dynamik nur durch statistische Beschreibung erfassen kann. An jedem Punkt werden dafür Felder wie die Teilchendichte, Energiedichte, Druck, Temperatur, etc. betrachtet.

Im Allgemeinen können zwischen zwei infinitesimalen Raumzeitelementen (innerhalb derer die Flüssigkeit als homogen angenommen wird) Kräfte in beliebige Richtungen wirken. Von einer idealen Flüssigkeit verlangen wir, dass die Scherkräfte verschwinden und nur noch der Druck wirkt. Dragon schreibt: In einer idealen Flüssigkeit gibt es keine gewölbeartig tragenden Kugelschalen.

<sup>4</sup>Ich denke, dass man so nur die eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen erhält.

## 2.5 Staub

Staub ist der Spezialfall einer idealen Flüssigkeit, in dem es ein Inertialsystem gibt, in dem alle Teilchen ruhen. In diesem MCRF wird die Teilchenzahldichte  $n$  an jedem Punkt gemessen (in dazu bewegten Bezugssystemen ist die Teilchenzahldichte wegen der Lorentzkontraktion höher). Zusammen mit der Vierergeschwindigkeit, die für ein sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegendes MCRF

$$v = \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

lautet, definiert man den *Teilchenzahlfluss*

$$N = n \cdot v,$$

der gleichzeitig die Teilchenzahldichte und den Fluss durch Oberflächen senkrecht zu den Koordinatenachsen enthält. Die Definition ist koordinatenunabhängig, die Komponenten transformieren also wie Vektorkomponenten.

## 2.6 Lagrangeformalismus (für freie Teilchen)

Schränkt man die Wirkung  $S = \int L dt$  auf Skalare ein (weil die daraus folgenden physikalischen Weltlinien beobachterunabhängig sein sollen), ist die Wahl

$$L = -m\sqrt{1-v^2} \approx -m + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

naheliegender, weil dann  $L dt \sim d\tau$  lorentzinvariant ist. Der Faktor dient dazu, den nicht-relativistischen Grenzfall (bis auf eine additive Konstante) richtig herauszubekommen. Anschaulich heißt Minimierung der Wirkung dann Minimierung der Eigenzeit.

Variation der Wirkung führt auf die Bewegungsgleichung für ein speziell relativistisch frei fallendes Teilchen

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = 0$$

( $v$  = Vierergeschwindigkeit,  $a$  = Viererbeschleunigung).

## 2.7 Energie-Impuls-Tensor (für Staub und ideale Flüssigkeiten)

Im MCRF ist die Energiedichte allein durch die Ruheenergie bestimmt.

$$\rho = mn$$

In einem bewegten Bezugssystem vergrößert sich die Energie eines Teilchens auf  $\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$  und die Teilchenzahldichte auf  $\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}$ . Beim Wechsel des Bezugssystems erhält die Energiedichte also nicht einen, sondern zwei Faktoren  $\gamma$ , weshalb sie nicht Komponente eines Vektors, sondern höchstens eines Tensors mit Komponenten  $T^{\mu\nu}$  sein kann.

$$T^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = mnv^\mu v^\nu$$

Die Komponenten des *Energie-Impuls-Tensors* haben anschauliche Bedeutungen. Die  $T^{\mu\nu}$ -Komponente gibt die Flussdichte des  $\mu$ -Impulses durch die  $x^\nu = \text{const}$ -Fläche an, d. h.:



- $T^{00}$ : Energieflussdichte durch  $t = \text{const}$ -Fläche  $\equiv$  Energiedichte
- $T^{i0}$ : Flussdichte der  $i$ -Komponente des Impulses durch  $t = \text{const}$ -Fläche  $\equiv$  Impulsdichte
- $T^{0k}$ : Energieflussdichte in räumliche  $k$ -Richtung  $\equiv$  Energie-/Massenfluss (Wärmeleitung)
- $T^{ik}$ : Impulsflussdichte der  $i$ -Komponente in räumliche  $k$ -Richtung  $\equiv$  Impulsstromdichte

Der Energie-Impuls-Tensor ist symmetrisch.  $T^{0i} = T^{i0}$  lässt sich damit begründen dass sich beide Ausdrücke (Energieflussdichte und Impulsdichte) als  $\rho \vec{v}$  schreiben lassen. Die räumlichen Komponenten  $T^{ik}$  entsprechen Scherkräften (-spannungen) an der  $x^k = \text{const}$ -Fläche, wobei die Diagonalelemente  $T^{ii}$  senkrecht auf der jeweiligen Fläche stehen ( $\equiv$  Druck). Aus Gründen der Drehimpulserhaltung muss  $T^{ik} = T^{ki}$  gelten.

Für Staub gilt daher

$$(T^{\mu\nu}) = \frac{\rho}{1 - v^2} \begin{pmatrix} 1 & v^i \\ v^i & v^i v^j \end{pmatrix}$$

mit der Energie-/Massendichte im MCRF  $\rho = mn$ .

Für eine ideale Flüssigkeit kommt noch Druck hinzu:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)v^\mu v^\nu + p \eta^{\mu\nu}$$

Im MCRF:

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Dass ideale Flüssigkeiten keine Wärme leiten manifestiert sich in  $T^{0i} = 0$ , die Abwesenheit von Viskosität (Scherkräften) in  $T^{ij} = 0$  für  $i \neq j$ .

## 2.8 Energie-Impuls-Erhaltung

Der Energie-Impuls-Tensor erfüllt eine Kontinuitäts-/Bilanzgleichung

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

bzw.  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  im flachen Raum (z. B. SRT), die man aus der lokalen Energie-/Impulserhaltung herleiten kann.

# 3 Allgemeine Relativitätstheorie

## 3.1 Äquivalenzprinzipien

Man hat (als Beobachtungstatsache) die Proportionalität (in geeigneten Einheiten: Gleichheit) von schwerer und träger Masse festgestellt, was zu dem *schwachen Äquivalenzprinzip*

führt: „Die Bahnen frei fallender Testteilchen hängen nur von Anfangsort und -geschwindigkeit, nicht jedoch von ihrer Masse oder inneren Zusammensetzung ab.“

Einsteins Formulierung geht weiter: Ein frei fallender Beobachter kann ohne Wechselwirkung mit der Umgebung nicht feststellen, ob er der gravitativen Wirkung externer Massen unterliegt. Eine andere Formulierung lautet, dass ein homogenes Gravitationsfeld nicht von einer gleichmäßigen Beschleunigung in einer flachen Raumzeit zu unterscheiden ist. Oder: Im lokalen Inertialsystem (MCRF) gelten die Gesetze der SRT.<sup>5</sup>

Sobald das Gravitationsfeld inhomogen ist, spielt die Lokalität des Äquivalenzprinzips eine große Rolle. So treten bei ausgedehnten Körper Gezeitenkräfte auf. Außerdem fallen geladene Teilchen aufgrund ihres elektromagnetischen Feldes nicht genauso wie ungeladene.

Gelegentlich wird auch ein *aktives Äquivalenzprinzip* formuliert: Die gravitative Wirkung von Materie oder Strahlung hängt ausschließlich von ihrem Energie-Impuls-Tensor ab.

### 3.2 Einsteintensor

Der Einsteintensor ist definiert als der spurinvertierte Ricci-Tensor

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}$$

und erfüllt nach zweifacher Kontraktion der Bianchi-Identität (5) die Gleichung

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0.$$

### 3.3 Einstein'sche Feldgleichungen

Die Idee bei der Herleitung der Feldgleichungen ist, die Massendichte  $\rho$  in der Feldgleichung  $\Delta\phi = 4\pi G\rho$  der Newton'schen Gravitation durch den Energie-Impuls-Tensor  $T_{\text{Materie}}^{\mu\nu}$  zu ersetzen. Verlangt man ferner, dass die linke Seite der Gleichung bis zu zweiten Ableitungen der Metrik enthalten soll, ist die allgemeine Form, die  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu}$  erfüllt

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T_{\text{Mat.}}^{\mu\nu}.$$

$\Lambda$  ist die kosmologische Konstante, die zunächst beliebig ist.  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$  ist durch den Newton'schen Grenzfall festgelegt.

### 3.4 Energie-Impuls-Tensor nach Absorption von $\Lambda$

Schreibt man den Term mit der kosmologischen Konstante auf die rechte Seite, kann man ihn als Beitrag zum Energie-Impuls-Tensor interpretieren. Die Einstein'schen Feldgleichungen schreiben sich dann einfach als

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

---

<sup>5</sup>Diese Formulierung ist problematisch, weil in der SRT beispielsweise keine Gravitationswellen auftreten. Demnach dürften frei fallende Beobachter keine Gravitationswellen beobachten können, was nach ART aber falsch ist.

mit

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{Mat.}}^{\mu\nu} + T_{\text{Vak.}}^{\mu\nu}, \quad T_{\text{Vak.}}^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{\kappa} g^{\mu\nu}.$$

$T_{\text{Vak.}}^{\mu\nu}$  ist der Energie-Impuls-Tensor des Vakuums. Es gibt eine Vakuumenergiedichte genau dann, wenn die kosmologische Konstante nicht verschwindet.

### 3.5 Schwachfeldnäherung / linearisierte Feldgleichungen (weak field approximation)

In Schwachfeldnäherung ist die Metrik fast Minkowski'sch,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

mit  $h_{\mu\nu}$  klein.

Führt man den spurinvertierten Tensor  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$  ein ( $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ ,  $\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -h$ ), ignoriert alle Terme  $O(h^2)$  und nutzt eine infinitesimale Koordinatentransformation  $x' = x + \xi$ , um die Eichbedingung  $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  zu implementieren, so folgt

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\rho \partial^\rho \bar{h}_{\mu\nu}$$

und deshalb auch die *linearisierten Feldgleichungen*

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}.$$

### 3.6 Hulse-Taylor-Doppelpulsar

Der Hulse-Taylor-Pulsar ist ein rotierender Neutronenstern, der Radiopulse im Abstand von etwa 59 ms (17 pro Sekunde) aussendet und der in einem Doppelsternsystem mit einem zweiten Neutronenstern (von dem wir keine Pulse empfangen) den gemeinsamen Schwerpunkt innerhalb von 7,75 Stunden umläuft.

Hulse und Taylor stellten 1974 fest, dass die Umlaufperiode mit der Zeit kleiner wird ( $-2,4 \cdot 10^{-12}$ ), sich die Neutronensterne also annähern und dabei Energie in Form von Gravitationswellen abgeben.

### 3.7 Gravitationswellen in spurfreier Transversaleichung (transverse traceless (TT) gauge)

Abseits von Materie,  $T_{\mu\nu} = 0$ , lauten die linearisierten Feldgleichungen  $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  und die Lösungen sind durch ebene Wellen

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik \cdot x}$$

darstellbar. Die Lorenzeichung  $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  impliziert die Transversalität der Welle  $k^\mu A_{\mu\nu} = 0$  (der Wellenvektor ( $\equiv$  Ausbreitungsrichtung) steht senkrecht auf der Störung der Metrik) und die Feldgleichungen implizieren  $k^\rho k_\rho = 0$  (falls nicht alle  $h_{\mu\nu}$  verschwinden). Gravitationswellen breiten sich also mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Als *spurfreie Transversaleichung* (*transverse traceless (TT) gauge*) werden die zusätzlichen Bedingungen  $A^\mu{}_\mu = 0$  und  $A_{\mu 0} = 0$  bezeichnet. Aus der ersten Bedingung folgt  $h = 0$  und

deshalb  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ . Die zweite Bedingung besagt, dass nur die räumlichen Komponenten beitragen. Legt man weiter das Koordinatensystem so, dass  $k = (\omega, 0, 0, \omega)$  gilt, folgt

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Gravitationswelle hat also zwei Polarisationsfreiheitsgrade, die (anders als die Polarisationsfreiheitsgrade von elektromagnetischen Wellen) durch 45°-Drehung ineinander transformiert werden können.

Frei fallende Beobachter werden durch eine Gravitationswelle nicht beschleunigt. Für den „Verbindungsvektor“  $\xi^\mu$  und die relative Beschleunigung  $a^\mu = \frac{d^2\xi^\mu}{dt^2}$  gilt jedoch

$$\begin{pmatrix} a^x \\ a^y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddot{h}_+ & \ddot{h}_\times \\ \ddot{h}_\times & -\ddot{h}_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{pmatrix}.$$

## 4 Kosmologie

### 4.1 Hierarchie astronomischer Strukturen

#### 1. Sterne

Strahlen durch Kernfusion. Nächste Sterne: Proxima Centauri (1,29 pc = 4,24 ly), Alpha Centauri (1,34 pc = 4,37 ly)

#### 2. Galaxien

Gravitativ gebundene Systeme von  $10^7$ – $10^{14}$  Sternen (& sonstigem „Dreck“). Die Galaxis (unsere Galaxie, die Milchstraße) ist mit  $10^{11}$  Sternen und einem Durchmesser von ca.  $10^5$  ly recht groß. Unser Sonnensystem ist etwa 27 000 ly vom Zentrum der Milchstraße entfernt und umkreist es mit einer Rotationsgeschwindigkeit von  $220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ , entsprechend einer Periodendauer von 200 Millionen Jahren.

#### 3. Galaxiengruppen und -cluster (-haufen)

Ansammlungen von bis zu 50 („Gruppen“) oder bis  $10^3$  („Cluster“/„Haufen“) Galaxien. Die *lokale Gruppe* enthält die Milchstraße und die uns am nächsten gelegene andere Galaxie, die Andromedagalaxie.

Der nächstgelegene Galaxienhaufen ist der Virgo-Galaxienhaufen, der mehr als 1 300 Galaxien enthält und rund 16,5 Mpc (54 Mio. Lichtjahre) entfernt ist.

#### 4. Supercluster (Supergalaxienhaufen)

Superhaufen sind Ansammlungen von Galaxiengruppen und -haufen, die vermutlich gravitativ gebunden sind. Sie sind Teil einer wabenartigen Struktur, die leere Gebiete („Voids“) umspannt. Ihre Größe liegt im Bereich einiger Hundert Mpc, wobei die Galaxiendichte gerade einmal doppelt so groß wie der kosmische Durchschnitt.

#### 5. Super-Duper-Cluster

Gibt es nicht.

## 4.2 Fundamentale Beobachtungen

1. Über große Längenskalen (groß heißt wirklich sehr groß, etwa ab 100 Mpc oder  $10^8$  ly) gemittelt sind die Galaxien **homogen** im Raum verteilt.
2. Weit entfernte Galaxien sind am Himmel gleichmäßig verteilt (**isotrop**).
3. Die kosmische (Mikrowellen-)Hintergrundstrahlung entspricht einem Schwarzkörperspektrum der Temperatur 2,7 K und ist isotrop (relative Abweichung kleiner als ca.  $10^{-5}$ ).
4. Fast alle Galaxien haben rotverschobene Spektren.
5. Kosmische Objekte, die keine Kernfusion betreiben, haben alle eine ähnliche Zusammensetzung (ca. 75 % Wasserstoff, 25 % Helium-4).
6. Maximales Alter von Sternen  $\approx 13$  Mrd. Jahre.

1. bis 3. („das Universum ist räumlich homogen und isotrop“) bezeichnet man als *kosmologisches Prinzip*. 4. wird als Expansion des Universums interpretiert. 5. und 6. können damit erklärt werden, dass es vor ca. 13 Mrd. Jahren einen Urknall gab, aus dem alle kosmischen Objekte entstanden.

## 4.3 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik (FLRW)

Homogenität und Isotropie lassen sich nicht global definieren, weil sich das Universum zeitlich entwickelt (Homogenität gilt nur bei „Gleichzeitigkeit“ der Messungen an zwei Orten) und zwei relativ zueinander bewegte Beobachter nicht beide Isotropie beobachten können. Lösung durch folgende Annahmen:

- Es gebe eine Blätterung der Raumzeit in dreidimensionale raumartige Hyperflächen (*Homogeneity slices* (HS)), auf denen Homogenität gilt (z. B. konstante Materiedichte).
- Es gebe ferner eine „Faserung“ der Raumzeit durch Weltlinien bestimmter frei fallender Beobachter (*Isotropy Observers* (IO)), die Isotropie senkrecht zu ihrer Vierergeschwindigkeit beobachten. Diese Isotropieebenen müssen aus Konsistenzgründen tangential zu den Homogeneity Slices sein.

Dann wird ein Koordinatensystem konstruiert, indem einer HS  $\Sigma_I$  eine Zeitkoordinate  $t = t_I$  und ein räumliches Koordinatensystem  $x^i$  zugeordnet wird. Die räumlichen Koordinaten, bei denen die Weltlinie eines IO  $\Sigma_I$  durchstößt, werden mit dieser Weltlinie auf die anderen HS übertragen (*comoving spatial coordinates*). Eine beliebige HS  $\Sigma$  erhält eine Zeitkoordinate  $t = t_I + \tau$ , indem die Eigenzeit  $\tau$ , die für einen IO vergeht, wenn er von  $\Sigma_I$  nach  $\Sigma$  fällt, addiert wird. Diese Eigenzeit ist aus Homogenitätsgründen unabhängig von der Wahl des IO.

In diesem Koordinatensystem hat ein IO die Weltlinie  $x^\mu(\tau) = (t_I + \tau, x^1, x^2, x^3)$  mit Konstanten  $x^i$  und deshalb die Vierergeschwindigkeit  $v^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0)$ . Da Tangentialvektoren  $w^\mu = (0, w^1, w^2, w^3)$  orthogonal zu  $v^\mu$  sein sollen,  $v^\mu w^\nu g_{\mu\nu} = 0$ , folgt

$g_{0i} = 0$ . Aus  $dx^i = 0$  entlang der Weltlinien von IO und der Definition der Eigenzeit in der ART  $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$  folgt  $g_{00} = -1$ . Damit erhält man die FLRW-Metrik

$$g = -dt^2 + s(t)\tilde{g}_{ij}(x^k)dx^i dx^j = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right],$$

wobei die zweite Gleichung durch eine bestimmte Wahl räumlicher Koordinaten  $x^i = (r, \theta, \varphi)$  gilt.

Allein durch die Forderung von Homogenität und Isotropie ist die Metrik also bereits bis auf eine Konstante  $k \in \{-1, 0, 1\}$  und eine Funktion der Zeit  $a(t)$  (*kosmischer Skalenfaktor*) festgelegt. Eine HS kann topologisch mit  $S^3$  (im Fall  $k = +1$ ), dem  $\mathbb{R}^3$  (für  $k = 0$ ) oder  $\mathbb{H}^3$  (dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum, für  $k = -1$ ) identifiziert werden.

Eine andere Schreibweise der Metrik lautet

$$g = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + s^2(\chi)d\Omega^2], \quad s(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh \chi & k = -1 \end{cases}.$$

Dabei ist  $\chi \in [0, \pi]$ , falls  $k = +1$ , und  $\chi \in [0, \infty)$  sonst.

#### 4.4 Einsteintensor in FLRW

Schreibt man die Metrik als

$$g = -dt^2 + a(t)^2 \tilde{g}_{ij}(x^k)dx^i dx^j = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j,$$

so lautet der Einsteintensor

$$G_{00} = 3 \left[ \frac{k}{a^2} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right], \quad G_{ij} = - \left[ \frac{k}{a^2} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{\ddot{a}}{a} \right] g_{ij}. \quad (8)$$

#### 4.5 Kosmologische Rotverschiebung

Die Rotverschiebung von Licht ferner Galaxien wird durch den Parameter

$$z = \frac{\lambda_{\text{rec}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}}$$

beschrieben. Wir nehmen an, dass wir die ausgesandte Wellenlänge  $\lambda_{\text{em}}$  kennen (bekanntes Spektrum). Für rotverschobenes Licht ist  $z > 0$ .

Berechnungen für einen geodätischen Lichtstrahl ( $ds^2 = 0$ ) in  $\chi$ -Richtung, d. h.  $dt = \pm a(t)d\chi$ , mit zwei Wellenbergen im zeitlichen Abstand  $\delta t_{\text{em}}$  bzw.  $\delta t_{\text{rec}}$  ergeben<sup>6</sup>

$$\frac{a(t_{\text{rec}})}{a(t_{\text{em}})} = \frac{\delta t_{\text{rec}}}{\delta t_{\text{em}}} = \frac{\lambda_{\text{rec}}}{\lambda_{\text{em}}} = z + 1.$$

Durch eine Änderung des kosmischen Skalenfaktors gibt es also tatsächlich eine Rotverschiebung. Dafür ist **keine** Relativgeschwindigkeit notwendig.

<sup>6</sup>Dabei wurde  $\lambda \ll \frac{c}{H_0} \approx 10^{10}$  ly angenommen. Das ist für alle relevanten Fälle erfüllt.

## 4.6 Zeitentwicklung: Hubble-Parameter, Verzögerungsparameter (deceleration parameter)

$$\begin{aligned}
 H(t) &:= \frac{\dot{a}}{a}(t) && \text{ („Hubble-Parameter“)} \\
 q(t) &:= -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}(t) && \text{ („Verzögerungsparameter“)} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Ist  $z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)}$  monoton als Funktion von  $t \leq t_0$ , kann man die Zeitvariable ersetzen.

$$dz = -(z + 1)H(z)dt, \quad H(z) = H(z(t))$$

Damit lässt sich die zurückblickende Koordinatenzeit (*look-back time*) als Funktion der Rotverschiebung schreiben

$$t_0 - t = \int_0^z \frac{dz'}{(z' + 1)H(z')}. \quad (10)$$

Die Koordinatenentfernung  $\chi$  zwischen dem Sender eines Lichtstrahls an der Stelle  $(\chi, \theta, \varphi)$  und dem Empfänger bei  $(0, \theta, \varphi)$  lässt sich ebenfalls durch  $z$  ausdrücken.

$$\chi = \frac{1}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (11)$$

Für nahe Sender ( $z \ll 1$ ) gilt

$$\begin{aligned}
 t_0 - t &\approx \frac{z}{H_0} + O(z^2), \\
 \chi &\approx \frac{1}{a(t_0)} \frac{z}{H_0} + O(z^2).
 \end{aligned}$$

Hier ist die Kenntnis von  $H(z)$  bzw.  $a(t)$  nicht mehr erforderlich.

## 4.7 Kosmische Entfernungsmessung

**Raumartige Entfernung (proper spatial distance)** Auf einer HS ( $t = \text{const}$ ) wird mit dem räumlichen Teil der Metrik der Abstand  $d_p(t)$  als Länge der kürzesten Geodäte bestimmt. Der Abstand der Punkte mit Koordinaten  $(\chi, \theta, \varphi)$  und  $(0, \theta, \varphi)$  ist

$$d_p(t) = a(t)\chi.$$

**Leuchtkraftentfernung (luminosity distance)** Wenn man die Leuchtkraft  $L$  (ausgestrahlte Energie pro Zeit) zum Zeitpunkt der Lichtemission kennt und den beim Beobachter ankommenden Energiefluss  $F$  (Energie pro Zeit und Fläche) misst, besteht im euklidischen Raum der Zusammenhang

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}.$$

Analog definiert man die Leuchtkraftentfernung  $d_L$  so, dass

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \iff d_L := \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

gilt. Eine andere Schreibweise ist

$$d_L = a(t_0)s(\chi)(1 + z) \approx a(t_0)\chi = d_p(t_0),$$

wobei die Näherung für nahe Galaxien, d. h.  $\chi \ll 1 \Rightarrow s(\chi) \approx \chi$  und  $z \ll 1$ , gilt.

**Winkeldurchmesserentfernung (angular diameter distance)** Nimmt ein kosmologisches Objekt mit Durchmesser  $l$  am Himmel den Winkel  $\Delta\theta$  ein, wird durch

$$d_A = \frac{l}{\Delta\theta} = \frac{a(t_0)s(\chi)}{z+1}$$

die Winkeldurchmesserentfernung definiert. Bei expandierenden Modellen (z. B.  $a(t) = t^2$ ) nimmt die Winkeldurchmesserentfernung als Funktion der Rotverschiebung ein Maximum an und fällt danach wieder.

## 4.8 Hubbles Expansionsgesetz

Die Rotverschiebung von Spektrallinien erklärte Hubble mit dem Dopplereffekt, wobei die Geschwindigkeit, mit der sich Galaxien von uns entfernen, gemäß

$$v = H_0 d, \quad H_0 \approx 70 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

von ihrer Entfernung abhängt. Dieses Gesetz folgt, wenn man  $v = \dot{d}_p(t_0)$ ,  $d = d_p(t_0)$  und  $H_0 = H(t_0)$  identifiziert. Dann ist nämlich

$$v = \dot{d}_p(t_0) = \left. \frac{d}{dt} (a(t)\chi) \right|_{t=t_0} = \underbrace{\frac{\dot{a}}{a}(t_0)}_{H(t_0)} \underbrace{a(t_0)\chi}_{d_p(t_0)}$$

## 4.9 Beiträge zum Energie-Impuls-Tensor: Strahlung, Materie, Vakuumenergie

Annahme in der Kosmologie: alle Komponenten des Universums können als nicht wechselwirkende ideale Flüssigkeiten beschrieben werden.

**Strahlung** (und relativistisch bewegte Teilchen) sind im Wesentlichen (CMB-)Photonen und Neutrinos. Sie sind seit der Auflösung des Plasmas kurz nach dem Urknall weitgehend wechselwirkungsfrei.

**Baryonische (und dunkle) Materie** wird idealisiert als gleichmäßig verteilte Staubpartikel betrachtet.

**Vakuumenergie** müsste aus Gründen der Lorentz-Invarianz und der Homogenität einen Energie-Impuls-Tensor proportional zu  $g_{\mu\nu}$  besitzen. Da man wie in 3.4 die kosmologische Konstante als Beitrag zum Energie-Impuls-Tensor verstehen kann,

$$T_{\text{Vak.}}^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{\kappa} g^{\mu\nu},$$

identifiziert man die Energiedichte des Vakuums mit  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa}$  und den Druck mit  $p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{\kappa}$ . Der Gesamt-Energie-Impuls-Tensor ist

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & p g_{ij} \end{pmatrix}$$

mit  $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda$ ,  $p = p_r + p_m + p_\Lambda$  ( $r$  steht für Strahlung,  $m$  für Materie,  $\Lambda$  für die kosmologische Konstante / das Vakuum).



## 4.10 Friedmann-Gleichung(en)

Die Feldgleichungen  $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$  und (8) implizieren

$$G_{00} = 3 \left[ \frac{k}{a^2} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] = \kappa \rho \iff H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (12)$$

$$\frac{k}{a^2} + H^2 + 2 \frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa p \stackrel{(12)}{\iff} \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = \frac{-\kappa}{6} (\rho + 3p). \quad (13)$$

Diese Gleichungen heißen Friedmann-Gleichungen. Wichtig ist nur *die* Friedmann-Gleichung (12), da die *zweite* Friedmann-Gleichung (13) aus ihr und der Energieerhaltung

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \iff \dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \iff \underbrace{\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt} a^3}_{\text{„dE=-pdV“}} \iff \frac{d}{da}(\rho a^3) = -3p a^2 \quad (14)$$

folgt.

## 4.11 Zustandsgleichungen

Annahme: Die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors unterliegen als ideales Fluid einer Zustandsgleichung

$$p_\alpha = w_\alpha \rho_\alpha, \quad \alpha \in \{r, m, \Lambda\}, \quad (\text{keine Summe über } \alpha).$$

Dabei ist  $w_r = \frac{1}{3}$  (vgl. Photonengas),  $w_m = 0$  („druckloser Staub“),  $w_\Lambda = -1$  (siehe Vakuumenergie, 4.9). Gleichung (14) wird dann gelöst durch

$$\rho_\alpha \sim a^{-3(1+w_\alpha)},$$

d. h.  $\rho_m \sim a^{-3}$ ,  $\rho_r \sim a^{-4}$ ,  $\rho_\Lambda \sim a^0 = \text{const.}$  Damit lässt sich die Zeitabhängigkeit der Energiedichte schreiben als

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{m,0} \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \rho_{r,0} \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^4 + \rho_{\Lambda,0} \\ &= \rho_{m,0} (1+z)^3 + \rho_{r,0} (1+z)^4 + \rho_{\Lambda,0}. \end{aligned}$$

## 4.12 Kosmologische Parameter: Massendichten bzw. Dichteparameter

Die Lösung  $a(t)$  (bzw.  $\frac{a(t)}{a(t_0)}$  für  $k=0$ ) von (12) ist durch die heutigen Werte  $H_0, \rho_{r,0}, \rho_{m,0}, \rho_{\Lambda,0}$  eindeutig festgelegt. Alternativ kann die Zeitentwicklung durch die *dimensionslosen Dichteparameter*

$$\Omega_\alpha(t) := \frac{\kappa \rho_\alpha(t)}{3H(t)^2}$$

$$\Omega(t) := \frac{\kappa \rho(t)}{3H(t)^2} = \Omega_r(t) + \Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t)$$

$$\Omega_k(t) := -\frac{k}{a(t)^2 H(t)^2}$$

beschrieben werden, dann ist (12) äquivalent zu

$$\Omega_r(t) + \Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_k(t) = 1$$

und statt durch  $\{H_0, \rho_{r,0}, \rho_{m,0}, \rho_{\Lambda,0}\}$  kann ein kosmologisches Modell durch  $\{H_0, \Omega_{r,0}, \Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}\}$  spezifiziert werden.

$\Omega_\Lambda$  ist durch die Abhängigkeit von  $H(t)$  im Allgemeinen nicht konstant. Das Vorzeichen von  $\Omega_k$  ist durch  $k$  festgelegt und daher konstant. Deshalb ist auch die Beziehung  $\Omega \stackrel{\leq}{\geq} 1$  zeitunabhängig.

### 4.13 Kritische Dichte

Der Fall  $\Omega = 1$ , d. h.  $k = 0$ , definiert die *kritische Dichte*

$$\Omega(t) = 1 \iff \rho(t) = \rho_{\text{crit}}(t) := \frac{3H(t)^2}{\kappa}.$$

Heute gilt  $\rho_{\text{crit},0} \approx 5,5 \frac{m_{\text{Proton}}}{m^3}$ .

### 4.14 Verzögerungsparameter in Termen der Dichteparameter zeigt: $\Lambda > 0$ beschleunigt die Expansion

Die zweite Friedmann-Gleichung (13) impliziert die Darstellung des Verzögerungsparameters (9) als Funktion der Dichteparameter

$$q = \frac{1}{2} (\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda).$$

Man liest ab: Materie, Strahlung und  $\Lambda < 0$  *bremsen* die Expansion, während  $\Lambda > 0$  die Expansion *beschleunigt*.

### 4.15 Kosmologische Modelle

#### Einkomponentige Modelle

1. Nur Materie ( $\Omega_m = 1, \Omega_r = \Omega_\Lambda = \Omega_k = 0$ ):

$$a(t) \sim t^{2/3}, \quad k = 0$$

$$\Rightarrow H(t) = \frac{2}{3t}, q(t) = \frac{1}{2}, \rho(t) = \rho_m(t) = \frac{4}{3\kappa t^2} = \frac{1}{6\pi G t^2}$$

2. Nur Strahlung ( $\Omega_r = 1, \Omega_m = \Omega_\Lambda = \Omega_k = 0$ ):

$$a(t) \sim t^{1/2}, \quad k = 0$$

$$\Rightarrow H(t) = \frac{1}{2t}, q(t) = 1, \rho(t) = \rho_r(t) = \frac{3}{4\kappa t^2} = \frac{3}{32\pi G t^2}$$

3. Nur Vakuum-Energie ( $\Omega_\Lambda = 1, \Omega_r = \Omega_m = \Omega_k = 0$ ):

$$a(t) \sim e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} = e^{H(t)t}, \quad k = 0$$

$$\Rightarrow H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \text{const}, q(t) = -1, \rho(t) = \rho_0 = \frac{\Lambda}{\kappa}$$

(„de-Sitter-Universum“)

4. Nur Krümmung ( $\Omega_k = 1, \Omega_r = \Omega_m = \Omega_\Lambda = 0$ ):

$$a(t) = t, \quad k = -1$$

$$\Rightarrow H(t) = \frac{1}{t}, q(t) = 0, \rho(t) = 0$$

(„Milne-Universum“)

## Zweikomponentige Modelle

1. Materie & Krümmung ( $\Omega_r = \Omega_\Lambda = 0$ ):

Unter Verwendung der *konformen Zeit*  $\eta$  folgt für  $k = +1$

$$a(\eta) = \frac{A}{2}(1 - \cos \eta), \quad A = \frac{\kappa}{3}\rho_{m,0} a(t_0)^3$$

$$t(\eta) = \frac{A}{2}(\eta - \sin \eta),$$

d. h. es gab einen Urknall (*Big Bang*) bei  $\eta = t = 0$  und gibt einen *Big Crunch* bei  $\eta = 2\pi, t = A\pi < \infty$ . Für  $k = -1$  gilt

$$a(\eta) = \frac{A}{2}(\cosh \eta - 1),$$

$$t(\eta) = \frac{A}{2}(\sinh \eta - \eta),$$

so dass die Expansion nicht endet (die Expansionsgeschwindigkeit geht von oben gegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{a} = 1$ ). Der Fall  $k = 0$  ist mit dem Fall „nur Materie“ von oben identisch ( $a \sim t^{2/3}, \dot{a} \rightarrow 0$ ).

2. Strahlung & Krümmung ( $\Omega_m = \Omega_\Lambda = 0$ ):

Für  $k = 0$ : Wie oben („nur Strahlung“),  $a(t) \sim t^{1/2}$ . Für  $k = \pm 1$ :

$$a(t) = \sqrt{\frac{t^2 - 2k\sqrt{A}t}{-k}}, \quad \text{bzw.}$$

$$a(\eta) = \begin{cases} \sqrt{A} \sin \eta & k = +1 \\ \sqrt{A} \sinh \eta & k = -1 \end{cases},$$

$$t(\eta) = \begin{cases} -\sqrt{A} \cos \eta + \sqrt{A} & k = +1 \\ \sqrt{A} \cosh \eta - \sqrt{A} & k = -1 \end{cases}$$

Das Expansionsverhalten ist qualitativ genauso wie für den Fall „Materie und Krümmung“.

3. Vakuumenergie & Krümmung ( $\Omega_r = \Omega_m = 0$ ):

Für  $\Omega_\Lambda < 0$  muss  $k < 0$  gelten und es folgt

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sin(\sqrt{A}t),$$

so dass durch die negative kosmologische Konstante ein Kollaps geschieht.

Im Fall  $\Omega_\Lambda > 1$  (also  $\Omega_k < 0 \Leftrightarrow k = +1$ ) ist

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{A}} \cosh(\sqrt{A}t),$$

es gibt also ein *Big Bounce* bei  $t = 0$  mit  $a(0) > 0$  (kein Big Bang).

**Statische Universen** Statisch heißt hier  $a(t) = a_0 = \text{const.}$  Daraus folgt

$$2\rho_r + \rho_m = 2\rho_\Lambda,$$

$$\frac{\kappa}{3} \left( 2\rho_r + \frac{3}{2}\rho_m \right) = \frac{k}{a^2}.$$

Beachte:  $\Omega_\alpha$  sind hier nicht definiert, weil  $H = 0$ . Der Spezialfall  $\rho_r = 0$ , also

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2}\rho_m = \frac{k}{\kappa a^2}$$

(bzw.  $\Lambda = 4\pi\rho_m$ ) wird als Einstein-Kosmos bezeichnet. Mit diesem Wert führte Einstein die kosmologische Konstante ursprünglich ein, um ein statisches Universum zu erhalten.

**Unser Universum** Die Beiträge aus Strahlung  $\Omega_r$  kann man näherungsweise vernachlässigen, da sie nur kurz nach dem Urknall dominierten. Damit wird das dynamische Verhalten des Universums qualitativ vollständig durch  $\Omega_{m,0}$  und  $\Omega_{\Lambda,0}$  beschrieben ( $H_0$  parametrisiert nur die Zeit- und Längenskalen).

In Abbildung 1 sind die Eigenschaften des Modells in Abhängigkeit der Parameter aufgetragen. Zusätzlich sind Messungen zu sehen, die die Lage unseres Universums andeuten. Nicht eingezeichnet: Die Ursprungsgerade mit Steigung  $\frac{1}{2}$ , oberhalb derer die Expansion beschleunigt ist, darunter verläuft sie gebremst.

Die rechte untere Ecke ist grau, weil für Parameter aus diesem Bereich heute bereits ein Big Crunch stattgefunden hätte (d. h. die „Lebenserwartung“ des Universums wäre kleiner als sein derzeitiges Alter).

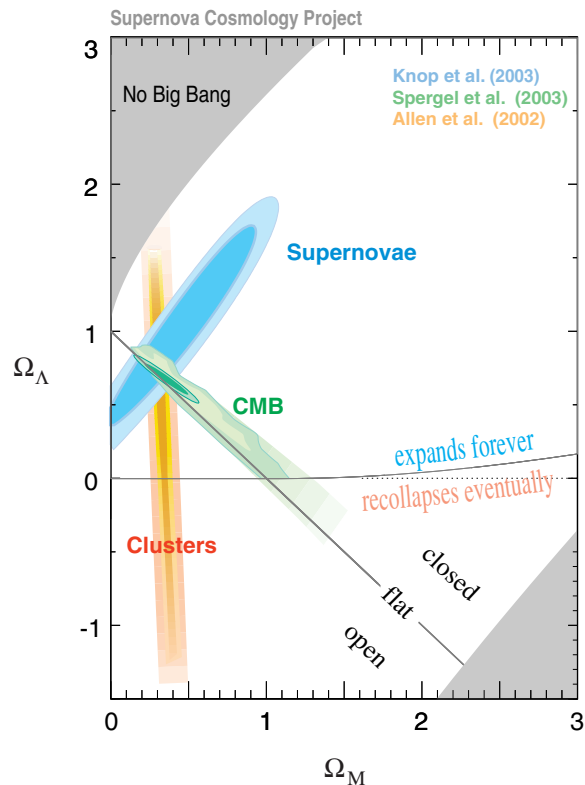


Abbildung 1: Dynamik des Universums in Abhängigkeit der Werte von  $\Omega_\Lambda$  und  $\Omega_m$  heute.<sup>7</sup>

#### 4.16 Leuchtkraftentfernung-Rotverschiebung-Relation (luminosity distance-redshift relation)

Mit Gleichung (11) und der zweiten Friedmann-Gleichung (13) lässt sich zunächst die Koordinatenentfernung als

<sup>7</sup>Quelle: <http://www-supernova.lbl.gov/>

$$\chi(z) = \frac{1}{a_0 H_0} \int_{(1+z)^{-1}}^1 \frac{dx}{\underbrace{\sqrt{\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0}x + \Omega_{\Lambda,0}x^4 + \Omega_{k,0}x^2}}_{=:E(z)}}$$

schreiben, so dass für die Leuchtkraftentfernung  $d_L = a_0(1+z)s(\chi)$  gilt

$$d_L(z) = a_0(1+z) s\left(\frac{E(z)}{a_0 H_0}\right).$$

Da die rechte Seite von den Parametern  $\{\Omega_{r,0}, \Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}\}$  abhängt, können sie durch Messungen der linken Seite bestimmt werden. Dafür ist es nach Definition  $d_L = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2}$  notwendig, den Energiefluss  $F$  eines Objektes mit bekannter Luminosität  $L$  zu messen. Solche Objekte sind beispielsweise durch Ia-Supernovae gegeben.

## 4.17 Standardkerzen (Ia-Supernovae)

Weißer Zwerge (ausgebrannte Sterne) werden durch den Fermi-Druck der Elektronen stabilisiert, solange  $M \lesssim 1,44 M_\odot$  („Chandrasekhar-Limit“). Akkretiert ein weißer Zwerg (z. B. in einem Doppelsternsystem) Masse und überschreitet so die Grenze, kollabiert er, bis das Kohlenstoffbrennen (Kernfusion) ein- und in einer Kettenreaktion enorme Mengen Energie freisetzt, die den Stern sprengen. Die absolute Helligkeit kann sehr gut abgeschätzt werden.

## 4.18 Aktuelle Forschungsergebnisse und Interpretationen

1. Aktuelle Messungen an der Hintergrundstrahlung haben ergeben:

$$\begin{aligned}\Omega_{m,0} &= 0,314 \pm 0,020 \\ \Omega_{\Lambda,0} &= 0,686 \pm 0,020 \\ (\Omega_{r,0} &\approx 5 \cdot 10^{-5}) \\ \Rightarrow \Omega &= 1,00 \pm 0,02, \quad |\Omega_k| \lesssim 0,02\end{aligned}$$

2. Die beschleunigte Expansion kann nicht nur mit der kosmologischen Konstante, sondern auch mit anderer, *exotischer* Materie erklärt werden, falls sie  $w < -\frac{1}{3}$  (in  $p = w\rho$ ) erfüllt (wg. (13)). Das könnte z. B. ein zeitabhängiges Skalarfeld sein. Messungen sagen allerdings  $w_{\text{beschl.}} \approx -1 \pm 0,1$  voraus, so dass die Beschleunigung der Expansion durch eine kosmologische Konstante wahrscheinlich ist.
3. „Bekannte“ Vakuumenergien (aus Vakuumfluktuationen, Higgs-Feld, QCD oder anderen quantenmechanischen Effekten) übertreffen die Vakuumenergie durch die kosmologische Konstante um 56 bis 122 Größenordnungen. Bisher ungelöste Fragestellung: Weshalb ist  $\rho_\Lambda \approx (2 \text{ meV})^4$  so klein, aber trotzdem nicht Null?
4. „Koinzidenzproblem“: Warum ist heute  $\Omega_m \approx \Omega_\Lambda$ , während früher  $\Omega_m \gg \Omega_\Lambda$  und in der Zukunft  $\Omega_m \ll \Omega_\Lambda$  gilt?

5. Mit Hilfe der zurückschauenden Koordinatenzeit (10) und unter der Annahme  $t_{\text{Big Bang}} = 0$  lässt sich das Alter des Universums mit

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2}}$$

als Funktion der Parameter bestimmen. Der Vergleich mit dem Alter der ältesten Sterne unserer Galaxie (ca. 13,2 Gyr) kann bestimmte Konfigurationen (z. B.  $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ ) ausschließen.

6. Für nichtrelativistische Materie gilt:

$$\Omega_{m,0} \approx 0,3 \Leftrightarrow \rho_{m,0} \approx 1,6 \frac{m_{\text{Proton}}}{m^3}$$

**Aber:** Nur etwa 15% davon ist sichtbar. Der Rest ist *Dunkle Materie*, die keiner elektromagnetischen und wahrscheinlich keiner starken Wechselwirkung unterliegt. Sie muss außerdem stabil auf kosmologischen Zeitskalen sein und nichtrelativistische Geschwindigkeit haben (*kalte* dunkle Materie, *CDM*), da sie sonst gegen den gravitativen Kollaps wirken würde. Aktuelle Messungen ergeben:

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_b \approx 0,049 \\ \Omega_{dm} \approx 0,267 \end{array} \right\} \Rightarrow \Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm} \approx 0,316$$

Erste Anzeichen für dunkle Materie wurden früh bei der Umlaufgeschwindigkeit von Sternen in Spiralgalaxien entdeckt (die Geschwindigkeit sinkt nicht, wie nach Kepler zu erwarten wäre, sondern flacht ab). Neutrinos können die dunkle Materie nicht erklären, da sie zu leicht sind. MACHOS (*massive astrophysical compact halo objects*, nichtleuchtende kompakte Objekte aus gewöhnlicher Materie, z. B. braune Zwerge) gibt es zu wenige, um dunkle Materie erklären zu können. Außerdem tragen sie zu  $\Omega_b$  bei, jedoch ist  $\Omega_b \approx 0,049 \ll 0,3$  durch verschiedene Experimente und Theorien gesichert.

Aktueller Forschungsstand ist, dass dunkle Materie aus Teilchen besteht, die durch das Standardmodell nicht beschrieben werden.

7. Das Flachheitsproblem: Falls  $k \neq 0$ , muss  $\Omega_k$  wegen  $|\Omega_k(t_0)| \lesssim 0,02$  in der Anfangszeit des Universums *extrem klein* gewesen sein (*fine-tuning*), z. B.

$$\begin{aligned} 0 < |\Omega_k(t_{\text{BBN}})| &\lesssim 10^{-16}, \\ 0 < |\Omega_k(t_{\text{Pl.}})| &\lesssim 10^{-60}, \end{aligned}$$

wobei  $t_{\text{BBN}} \approx 200$  s das Ende der Nukleosynthese (*Big Bang Nucleosynthesis*) kurz nach dem Urknall und  $t_{\text{Pl.}} \approx 10^{-43}$  s die Planck-Zeit ist.

8. Das Horizontproblem: Wir sehen heute Licht (oder z. B. kosmische Hintergrundstrahlung) aus Bereichen des Universums, die schon vor der Rekombinationsphase kausal getrennt waren. Es ist nicht zu erklären, weshalb kausal unzusammenhängende Bereiche so homogen aussehen, wie es sich uns darstellt.

9. Sowohl das Flachheits- wie auch das Horizontproblem können möglicherweise durch die *Inflationstheorie* gelöst werden. Kurz nach dem Urknall gab es eine kurze exponentielle Expansion des Raumes (um etwa  $10^{30}$  bis  $10^{50}$ ), der sowohl den Raum plättete ( $|\Omega_k|$  verringerte) als auch kausal verbundene Gebiete trennte. Praktischerweise kann man mit der Inflationstheorie auch die Fluktuationen in der kosmischen Hintergrundstrahlung erklären. Ist also 'ne tolle Sache!

## 5 Schwarze Löcher

### 5.1 Schwarzschildradius (klassisch)

Der Schwarzschildradius ist in klassischer Rechnung derjenige Radius, bei dem bei gegebener Masse die Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit wird.

$$r_S = 2M = \frac{2GM}{c^2}$$

Das bedeutet, dass Licht von der Oberfläche eines Sterns, der die Größe des Schwarzschildradius hat, nicht (bzw. gerade so) ins Unendliche entkommen kann. Wir sehen später: Das ist allgemeinrelativistisch nicht richtig, denn Licht von innerhalb des Schwarzschildradius kann ihn überhaupt nicht verlassen (nicht nur nicht ins Unendliche).

### 5.2 Kompaktheitsparameter

Der Kompaktheitsparameter

$$\frac{GM}{c^2 R} = \frac{r_S}{2R}$$

eines Sterns mit Masse  $M$  und Radius  $R$  ist ein Anzeichen dafür, ob die Newton'sche Gravitationstheorie noch gültig ist. Ab etwa  $10^{-2}$  (d. h. der Schwarzschildradius ist mehr als 2% des Radius) sollte man relativistische Korrekturen einbeziehen.

### 5.3 Energiedichte des Gravitationsfeldes

Durch

$$\mathcal{E}_g := -\frac{1}{8\pi G} \|\vec{\nabla}\phi\|^2, \quad \mathcal{E}_e := \frac{\epsilon_0}{2} \|\vec{\nabla}\varphi\|^2$$

sind die Energiedichten des Gravitations- bzw. elektrischen Feldes gegeben.

Über  $E_g = \int \mathcal{E}_g dV$  kann die gravitative Selbstenergie berechnet werden. Für ein „schwarzes Loch“ (Kugel mit konstanter Dichte und Schwarzschildradius) ist  $E_g = -\frac{1}{4}Mc^2$  in der Größenordnung der Ruheenergie.

### 5.4 Selbstkonsistenter Einbau der gravitativen Wechselwirkung

Nach der Äquivalenz von Masse und Energie muss  $\mathcal{E}_g$  bzw.  $\rho_{\text{selbst}} = \frac{\mathcal{E}_g}{c^2}$  selbst als Quelle von Gravitationsfeldern dienen.

$$\Delta\phi = 4\pi G(\rho_M + \rho_{\text{selbst}}) = 4\pi G\rho_M - \frac{1}{2c^2} \|\vec{\nabla}\phi\|^2$$

## 5.5 Newton'sche (sphärisch symmetrische) Sterne

Das System

$$\begin{cases} M'(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \\ -p'(r) = G \frac{\rho(r)M(r)}{r^2} & (\text{„Gleichgewichtsbedingung“}) \\ p = p(\rho) & (\text{„Zustandsgleichung“}) \end{cases} \quad (15)$$

besteht aus drei gewöhnlichen (Differential-)Gleichungen für die drei Funktionen  $M(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $p(r)$ . Die Größe des Sterns  $R$  ist durch die (erste) Nullstelle  $p(r = R) = 0$  gekennzeichnet. Sinnvolle Forderungen sind  $\rho(0), p(0) < \infty$ , daraus folgt  $\rho'(0) = 0 = p'(0)$ , wenn die Schallgeschwindigkeit endlich bleiben soll.

## 5.6 Polytrope Zustandsgleichung und Lane-Emden-Gleichung

Eine *polytrope Flüssigkeit* erfüllt die Zustandsgleichung

$$p = \kappa \rho^\gamma,$$

wobei für  $\gamma \neq 1$  oft der *Polytropenindex*  $n = \frac{1}{\gamma-1} \Leftrightarrow \gamma = 1 + \frac{1}{n}$  verwendet wird.

Nach Umskalierung von  $\rho(r)$  und  $r$

$$\theta(r) := \left( \frac{\rho(r)}{\rho(0)} \right)^{\gamma-1}$$

$$\xi := \left( \frac{4\pi G(\gamma-1)}{\kappa\gamma} \right)^{1/2} (\rho(0))^{\frac{2-\gamma}{2}} r$$

erhält man aus (15) die *Lane-Emden-Gleichung*

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0.$$

Lösungen müssen die Randbedingungen

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0$$

erfüllen. Eine Nullstelle (d. h. einen endlichen Radius des Sterns) besitzt eine Lösung genau dann, wenn

$$\gamma > \frac{6}{5} \quad \text{bzw.} \quad n < 5$$

ist. Lösungen für verschiedene Polytropenindizes sind zusammen mit ihren ersten Nullstellen in Abbildung 2 aufgetragen.

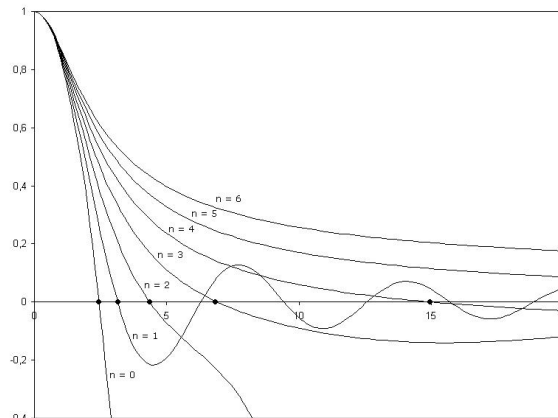


Abbildung 2: Lösungen der Lane-Emden-Gleichung für verschiedene Polytropenindizes.

## 5.7 Masse-Radius-Relation

Ist  $\xi_1$  die erste Nullstelle der Lösung der Lane-Emden-Gleichung und  $R = r(\xi_1)$  der Radius des Sterns, so ist durch

$$M \sim R^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}} = R^{\frac{n-3}{n-1}}$$



die Masse-Radius-Relation gegeben. Die Proportionalitätskonstanten hängen von  $\gamma$ ,  $\xi_1$  und  $|\theta'(\xi_1)|$  ab.

Wir sehen später, dass für physikalisch interessante Sterne  $\frac{5}{3} \geq \gamma > \frac{4}{3}$  gilt. In diesem Bereich ist der Exponent von  $R$  negativ, schwerere Sterne sind also kleiner. Für  $\gamma = 2$  oder  $\gamma = \frac{4}{3}$  sind Masse und Radius unabhängig voneinander.

## 5.8 Gravitative Selbstenergie und thermische Energie eines Sterns

Die Gesamtenergie (gravitative Selbstenergie + thermische/innere Energie) eines Lane-Emden-Sterns kann man ausrechnen und ist kleiner Null (d. h. der Stern ist stabil), falls

$$\gamma > \frac{4}{3} \text{ oder } \gamma < \frac{6}{5}.$$

Da für den zweiten Fall keine Sterne mit endlichem Radius existieren, nehmen wir im Folgenden den ersten Fall an.

## 5.9 Entartete Sterne

Für einen kalten ( $T \approx 0$ ), durch Entartungsdruck stabilisierten Stern unterscheidet man die Fälle  $\rho \ll \rho_c$  und  $\rho \gg \rho_c$ , wobei  $\rho_c$  gerade die Dichte ist, bei der der mittlere Teilchenabstand gleich der halben Compton-Wellenlänge der betrachteten Teilchen ist. Man erhält, dass für  $\rho \ll \rho_c$  der Polytropenindex  $\gamma = \frac{5}{3} \Leftrightarrow n = 1,5$  ist. Für  $\rho \gg \rho_c$  gilt  $\gamma = \frac{4}{3} \Leftrightarrow n = 3$ .

Die maximale Masse, die ein durch Elektronendruck stabilisierter Stern (mit zwei Baryonen/Nukleonen pro Elektron,  $\rho_c \approx 2 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) besitzen kann, ist  $M \approx 1,44 M_\odot$ . Dies stellt eine Stabilitätsgrenze für **weiße Zwerge** dar. Wird ein weißer Zwerg schwerer, steigt die Materiedichte im Mittelpunkt an,  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , und der Radius geht gegen Null (Kollaps). Dabei wird nicht berücksichtigt, dass der Fermidruck der Nukleonen ebenfalls zur Stabilisierung beiträgt, sobald der Teilchenabstand in die Größenordnung der Compton-Wellenlänge der Nukleonen kommt.

Für **Neutronensterne** ( $\rho_c \approx 6 \cdot 10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) erhält man für den Fall  $\gamma = \frac{5}{3}$  den Kompaktheitsparameter

$$\frac{GM}{c^2 R} = 0,36 \left( \frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{2/3},$$

für  $\rho_0 \nearrow \rho_c$  muss also ART verwendet werden! (Für weiße Zwerge ist die Newton'sche Beschreibung auch noch für  $\rho_c < \rho_0 < 10^6 \rho_c$  ausreichend.)

Kompliziertere Rechnungen für Neutronensterne ergeben Stabilität für

$$1,5 M_\odot \lesssim M \lesssim 3 M_\odot.$$

## 5.10 Vergleich Newton ↔ Einstein

	Newton	Einstein
Potential	$\Phi$	$g_{\mu\nu}$ (Metrik)
Feld	$-\vec{\nabla}\Phi$	$-\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$
Bewegungsgleichung	$\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$	$\ddot{x}^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0$
Feldgleichung	$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ (elliptisch)	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ (4 elliptisch, 6 hyperbolisch)

## 5.11 Integrabilitätsbedingung

Der Einsteintensor  $G_{\mu\nu}$  ist divergenzfrei  $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$ , also folgt auch die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors. Das ist aber eine Nullaussage, weil man sie in der Regel schon benutzt, um die Form der Einstein'schen Feldgleichungen überhaupt herzuleiten.

## 5.12 Sphärisch-symmetrische Lösungen der Einstein-Gleichung

Die (fast) allgemeine Metrik  $g = -e^{2a(r,t)}c^2dt^2 + e^{2b(r,t)}dr^2 + r^2d\Omega^2$  ist durch nur zwei Funktionen  $a, b$  bestimmt.

**Äußere Schwarzschild-Metrik** Außerhalb ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) einer sphärisch-symmetrischen Massenverteilung nimmt die Metrik die Form

$$g = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} + r^2 d\Omega^2$$

an ( $r_S = 2M$ , Schwarzschildradius). Damit wird automatisch das **Birkhoff-Theorem** bewiesen: Jede sphärisch symmetrische Vakuumlösung der Einsteingleichungen ist statisch (auch wenn der Energie-Impuls-Tensor im Inneren der Materie zeitabhängig ist) und gleich der Schwarzschild-Lösung. Insbesondere können sphärisch pulsierende Sterne keine Gravitationswellen aussenden und das Innere einer sphärisch-symmetrischen Hohlkugel hat die flache Geometrie des Minkowski-Raums ( $r_S = 0$ ).

Mit kosmologischer Konstante lautet die äußere Schwarzschild-Metrik

$$g = -\left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2} + r^2 d\Omega^2.$$

**Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung** erhält man unter der Annahme, dass der Stern aus einer idealen Flüssigkeit besteht. Der Druckgradient erfährt gegenüber dem Newton'schen Fall drei relativistische Korrekturen: Der Druck erhöht die *aktive* und die *passive* schwere Masse, außerdem erhöht die Krümmung den Druckgradienten. Alle Effekte tragen zur Instabilität bei.

**Innere Schwarzschild-Metrik** Nimmt man eine kugelförmige Massenverteilung eines inkompressiblen Fluids an (und vernachlässigt die kosmologische Konstante), lässt sich die Metrik im Inneren exakt ausrechnen.

$$g = -\frac{1}{4} \left[ 3\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}} - \left( 1 - \frac{r_S r^2}{R^3} \right) \right]^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}} + r^2 d\Omega^2, \quad r \leq R$$

Der räumliche Teil der Metrik sieht aus wie  $S^3$ :

$$g_R = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}} + r^2 d\Omega^2 = \frac{R^3}{r_S} \left[ \frac{dz^2}{1 - z^2} + z^2 d\Omega^2 \right] = \frac{R^3}{r_S} [d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega^2]$$

( $z = \sqrt{\frac{r_S}{R^3}} r = \sin \psi$ ). Der Druck im Mittelpunkt divergiert für  $R \searrow \frac{9}{8} r_S$  (**Buchdahl-Limit**). Sinkt der Radius weiter, kollabiert der Stern unweigerlich. Dies lässt sich für jedes ideale Fluid zeigen.

**Gravitative Rotverschiebung im Gravitationsfeld der Schwarzschildlösung** Durch gravitative Zeitdilatation gilt in der äußeren Schwarzschildgeometrie für die Rotverschiebung eines Lichtstrahls, der bei  $r_1$  ausgesendet und bei  $r_2$  empfangen wird

$$z + 1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_S}{r_2}}{1 - \frac{r_S}{r_1}}}$$

Sie wird maximal für  $r_1 = \frac{9}{8} r_S$  und  $r_2 \rightarrow \infty$ , nämlich  $z = 2$ .

**Geodätische Bewegung in der äußeren Schwarzschildgeometrie** Aus der Geodätengleichung erhält man in radialer Richtung die Gleichung

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \tilde{E}^2 = \text{const},$$

wobei

$$V_{\text{eff}}(r) = K - \underbrace{K \frac{r_S}{r}}_{\frac{1}{r}\text{-Potential}} + \underbrace{\frac{l^2}{r^2}}_{\text{Drehimpulsbarriere}} - \underbrace{\frac{r_S l^2}{r^3}}_{\sim \frac{1}{r^2}}, \quad K = \begin{cases} c^2 & \text{für massive Teilchen} \\ 0 & \text{für Licht} \end{cases}$$

das effektive Potential ist.

1. **Licht:** Für  $K = 0$  hat das effektive Potential genau ein Maximum bei  $r = \frac{3}{2} r_S$ . Dort sind Kreisbahnen möglich („Photonensphäre“), aber instabil.
2. **Massive Teilchen:** Im Newton'schen Grenzfall ist der letzte Term vernachlässigbar und das Potentialminimum (stabile Kreisbahn) kann durch Verringern des Drehimpulses beliebig nah an  $r = 0$  gebracht werden (solange  $l \neq 0$  ist, fällt man nicht ins Zentrum).

Dies gilt nun nicht mehr. Stabile Kreisbahnen existieren für  $r \geq 3r_S$ , instabile für  $\frac{3}{2} r_S \leq r \leq 3r_S$ . Andere Bahnen (möglicherweise gebunden, z. B. Ellipsen) können sich dem Zentrum bis auf  $\frac{3}{2} r_S$  nähern, ohne nach  $r = 0$  zu stürzen.

3. **Radialer Fall bis zum Horizont:** Es vergeht nur endlich viel Eigenzeit, die Koordinatenzeit divergiert jedoch, wenn man sich  $r = r_S$  nähert.
4. **Radialer Fall innerhalb des Horizonts:** Wir gehen davon aus, dass auch für  $0 < r < r_S$  die äußere Schwarzschild-Metrik verwendet werden kann. Dann ist

$$\tau(r_S, 0) < \frac{\pi r_S}{2 c}, \quad \tau(r_S, 0)[\text{sec}] < 15 \cdot M[10^6 M_\odot]$$

die Eigenzeit, die vergeht, wenn man sich zeitartig von  $r = r_S$  nach  $r = 0$  bewegt. Selbst für das galaktische schwarze Loch (ca.  $4,31 \cdot 10^6 M_\odot$ ) bleibt nur etwa eine Minute. Da zeitartige Geodäten die Weglänge (Eigenzeit) *maximieren*, führt jede Abweichung vom freien Fall zu einer Verkürzung der Weglänge.

**Druck- und Zugspannungen beim freien Fall** Auswerten der Deviationsgleichung (6) ergibt: In radialer Richtung treten Zug-, senkrecht dazu Druckspannungen auf. Der Fall durch den Horizont  $r = r_S$  wird für Menschen unangenehm, wenn die Zentralmasse  $M < 10^4 M_\odot$  ist. Große Massen sind ungefährlicher, weil der Schwarzschildradius mit  $M$  anwächst. Das galaktische schwarze Loch ist also am Horizont gravitativ unbedenklich<sup>8</sup>, während die aushaltbare Zugspannung bei einem Neutronenstern ( $M \approx 1,5 M_\odot$ ) an der Oberfläche ( $R \approx 3r_S$ ) um 7 Größenordnungen überschritten wird.

**Die Kruskal-Raumzeit** Gesucht sind Koordinaten  $u, v$ , die  $t, r$  ersetzen und in denen die Metrik *konform flach* ist,

$$g = f^2(u, v) [-dv^2 + du^2] + r^2(u, v) d\Omega^2.$$

Solche Koordinaten sind durch

$$f^2(r) = 4 \frac{r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}}$$

und

$$u = \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_S}} \begin{cases} \cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) & \text{für } r > r_S \\ \sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) & \text{für } r < r_S \end{cases}$$

$$v = \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_S}} \begin{cases} \sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) & \text{für } r > r_S \\ \cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right) & \text{für } r < r_S \end{cases}$$

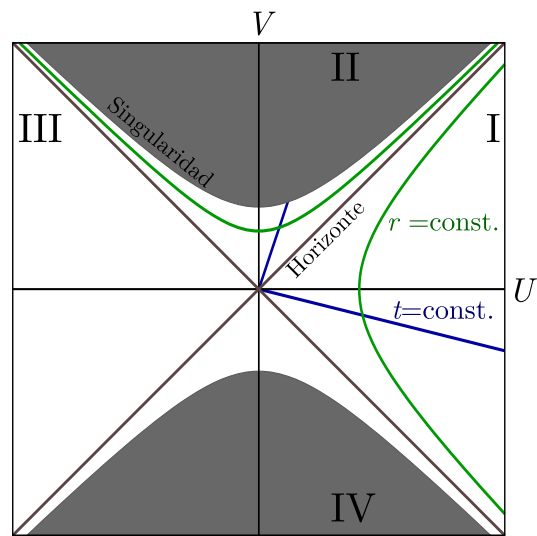


Abbildung 3: Kruskal-Mannigfaltigkeit in Kruskal-Szekeres-Koordinaten.<sup>9</sup>

gegeben. Linien konstanter Koordinatenzeit  $t$  sind Ursprungsgeraden, wobei die Steigungen  $\pm 1$  zu  $t = \pm\infty$  gehören. Linien mit  $r = \text{const}$  sind Hyperbeln. Der Lichtkegel wird an jeder Stelle nach Konstruktion durch  $du = \pm dv$  definiert (Minkowskisch).

<sup>8</sup>Allerdings nicht lange, da man ja innerhalb einer Minute in der Singularität landet.

<sup>9</sup>Quelle: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:KruskalSzekeres.svg>

Beachte: Durch die Schwarzschild-Koordinaten  $t, r$  werden nur die Bereiche I und II in Abbildung 3 beschrieben (denn für  $r > r_S$  ist  $u > 0$  und  $|v| < u$ , analog für  $r < r_S$ ). Der gesamte weiße Bereich ist die *Kruskal-Mannigfaltigkeit*, die maximal analytische Fortsetzung der Schwarzschild-Raumzeit. Insbesondere ist sie geodätisch vollständig, Geodäten enden (oder beginnen) also ausschließlich in physikalischen Singularitäten.

Die Singularität ( $r = 0$ ) in II heißt *schwarzes Loch*, weil alle zeit- oder lichtartigen Weltlinien, die innerhalb des Ereignishorizontes liegen, in ihr enden. Analog heißt die Singularität bei  $r = 0$  in IV *weißes Loch*. Sie kann durch nichts kausal beeinflusst werden, kein Licht kann sie erreichen.<sup>10</sup> Alles Licht, das vom weißen Loch ausgestrahlt wird, landet in I oder III. III ist isometrisch zu I, wird jedoch nicht durch Schwarzschildkoordinaten beschrieben (Schwarzschildkoordinaten decken also nicht die gesamte Kruskal-Mannigfaltigkeit ab).

**Sphärisch-symmetrische Verallgemeinerungen der Schwarzschildraumzeit** können in der Form

$$g = -f^2(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f^2(r)} + r^2 d\Omega^2$$

mit

$$f^2(r) = 1 - \frac{r_S}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2$$

geschrieben werden. Dabei gibt  $q^2 := \kappa \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{GQ^2}{c^4}$  die felderzeugende Ladung an. Für  $\Lambda = 0$  heißt die Lösung nach *Reissner-Nordström*, für  $q = 0$  nach *Schwarzschild-de-Sitter* oder *Kottler*.

## 5.13 Die Kerr-Newman-Raumzeit

beschreibt ein stationäres, achsensymmetrisches schwarzes Loch mit Drehimpuls und elektrischer Ladung. Die Metrik lautet in orthonormierten (Boyer-Lindquist-) Koordinaten<sup>11</sup>

$$g = -\theta^0 \otimes \theta^0 + \sum_{a=1}^3 \theta^a \otimes \theta^a$$

mit

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi], & \Delta &:= r^2 - r_S r + q^2 + a^2 \\ \theta^1 &= \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} dr, & &= \left(r - \frac{r_S}{2}\right)^2 - (m^2 - a^2 - q^2) \\ \theta^2 &= \rho d\theta, & \rho^2 &:= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ \theta^3 &= \frac{\sin \theta}{\rho} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt], & a &= \frac{J}{M}, \quad J = \text{Drehimpuls.} \end{aligned}$$

Für  $\tilde{r}_- < r < \tilde{r}_+$  mit  $\tilde{r}_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - q^2 - a^2 \cos^2 \theta}$  ist  $\frac{\partial}{\partial t}$  raumartig, es ist also nicht möglich, zu ruhen. Stationäre Bahnen (d. h.  $r = \text{const}$ ) sind aber noch bis  $r = r_+ =$

<sup>10</sup>Dragon: „Ein weißes Loch kann nicht entstehen.“

<sup>11</sup> $(r, \theta, \varphi)$  sind keine sphärischen Polarkoordinaten. Es gilt  $x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ .

$m + \sqrt{m^2 - q^2 - a^2}$  möglich, aber nur bei Rotation um das schwarze Loch. Tatsächlich<sup>12</sup> ist es nicht möglich, in der Ergoregion  $r_+ < r < \tilde{r}_+$  nicht zu rotieren.

Ist  $m < \sqrt{a^2 + q^2}$ , so existieren keine Horizonte (*nackte Singularität*).

In der Kerr-Newman-Raumzeit gibt es eine physikalische Singularität, die man beispielsweise am Kretschmann-Skalar

$$K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

oder am Riemann'schen Krümmungstensor ablesen kann. In orthonormierten Koordinaten divergieren nämlich seine Komponenten für  $\rho = 0$ , d. h. für

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \iff r = 0 \wedge \left( a = 0 \vee \theta = \frac{\pi}{2} \right).$$

Das entspricht einem Kreisring  $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$ .

**Geodätische Bewegung in der Kerr-Geometrie** Für  $q = 0$  ergibt sich die Kerr- aus der Kerr-Newman-Metrik. Geodätische Kreisbahnen in der Symmetrieebene  $\theta = \frac{\pi}{2}$  haben Winkelgeschwindigkeiten

$$\Omega_{\pm} = \frac{\sqrt{m}}{\pm r^{3/2} + \sqrt{ma}}.$$

Letzte stabile Kreisbahnen liegen im Extremfall  $a = m$  (weiter lässt sich ein schwarzes Loch nicht aufdrehen, ohne dass der Horizont verloren geht) bei  $r = m$  (mitrotierend) bzw.  $r = 9m$  (gegenrotierend). Im ersten Fall also bis an den Horizont heran!

## 5.14 Hawking-Temperatur

Einem schwarzen Loch kann man quantenfeldtheoretisch die Temperatur

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{G\hbar}{k_B c^3} \approx \Big|_{a=q=0} 6 \cdot 10^{-8} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) \text{ Kelvin}$$

zuordnen, wobei  $\kappa = \frac{r_+ - m}{r_+^2 + a^2}$  die *Oberflächengravitation* bezeichnet. Außerdem wird einem schwarzen Loch eine Entropie proportional der Oberfläche seines Ereignishorizonts zugeordnet.

$$S_H = \frac{k_B c^3}{4 G \hbar} A_H$$

**Hawking'scher Oberflächensatz:**  $dA \geq 0$  Anschaulich: Die Fläche des Ereignishorizonts (und damit seine Entropie) kann nicht kleiner werden. Präzise: Ist  $H_+$  der Ereignishorizont (2+1-dimensionale Fläche in der Raumzeit) und sind  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zwei raumartige Hyperflächen, wobei  $\Sigma_2$  in der Zukunft von  $\Sigma_1$  liege, so gilt

$$\text{Area}(\Sigma_2 \cap H_+) \geq \text{Area}(\Sigma_1 \cap H_+).$$

<sup>12</sup>Das sagt zumindest Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Ergosphere>

**Anwendungen des Oberflächensatzes: Verschmelzung schwarzer Löcher** Verschmelzen  $n$  Schwarzschild-schwarze-Löcher ( $a = 0$ ) gleicher Masse  $m$  und verschwindendem Gesamtdrehimpuls zu einem einzigen Schwarzschild-schwarzen-Loch, so ist der relative Energieverlust

$$\mathcal{E} = \frac{E_{\text{Anf}} - E_{\text{Ende}}}{E_{\text{Anf}}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

D. h. für  $n = 2$  kann bei diesem Prozess maximal 29 % der Energie freigesetzt werden. Denselben Wert erhält man für ein Kerr-schwarzes-Loch, das anfangs maximal aufgedreht ist und dann seinen gesamten Drehimpuls abgibt.

Verschmelzen zwei voll aufgedrehte Kerr-SL, so dass das resultierende schwarze Loch keinen Drehimpuls besitzt, beträgt die maximale Energieausbeute sogar 50 %!