

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

Zusammenfassung der Vorlesung von Prof. H. Frahm im
Wintersemester 2011/12
teilweise mit eigenen Bemerkungen und Beispielen

Florian Oppermann*

Januar/Februar 2012

*florian@flopwelt.de, <http://flopwelt.de/>

Vorwort

Diese Zusammenfassung meiner Vorlesungsmitschrift entstand in der Vorbereitung auf eine Prüfung der theoretischen Physik der ersten drei Bachelorsemester, diente aber vor allem der intensiven Nacharbeitung der Vorlesung. In diesem Sinne sind viele Beweise und Rechnungen ausführlich aufgeschrieben. An anderen Stellen steht lediglich, dass ich mich von der Richtigkeit überzeugt habe oder auch dass ich einen Gedanken *nicht* nachvollziehen konnte.

Die Kapitelaufteilung (Nummerierung und Benennung) habe ich 1:1 von der Vorlesung übernommen. Darüber hinaus habe ich es mir erlaubt, Zwischenüberschriften einzufügen, um etwas mehr Struktur zu schaffen. Leider ist es nicht zur Vollendung dieses Skripts gekommen, so fehlt beispielsweise das letzte Kapitel sowie einige Beispiele, die ich ursprünglich noch einbauen wollte.

Mit Sicherheit sind trotz sorgfältigen Arbeitens inhaltliche Fehler zu finden, darüber hinaus hat sich mein Umgang mit L^AT_EX während und nach der Erstellung dieses Dokuments deutlich verändert, so dass ich heute einige Dinge vermutlich anders setzen würde als sie hier zu sehen sind.¹

Ich freue mich über Kritik und Meldungen von Fehlern oder Inkonsistenzen. Dass Rückmeldungen (schnell) eingearbeitet werden, kann ich allerdings nicht versprechen. Ich sammle sie jedoch gerne für den Fall, dass ich dieses Dokument einmal grunderneuere.

Hannover, Januar 2014

Florian Oppermann

¹Ich habe beispielsweise im Nachhinein die Nummerierungsmethode der Gleichungen verändert. Falls Verweise auf Gleichungen nicht stimmen, liegt das vermutlich daran.

Inhaltsverzeichnis

1 Lagrange-Mechanik	4
1.1 Newtonsche Mechanik, d'Alembertsches Prinzip	4
1.1.1 Ansatz von Isaac Newton	4
1.1.2 Ansatz von Josef Louis Lagrange	4
1.2 Allgemeiner Formalismus	6
1.2.1 Klassifizierung von Zwangsbedingungen	6
1.2.2 Formalismus für holonome Zwangsbedingungen	6
1.2.3 Beispiel Fadenpendel	8
1.3 Hamiltonfunktion und kanonische Impulse	8
1.3.1 kanonische Impulse	9
1.3.2 Hamiltonfunktion	9
1.4 Geschwindigkeitsabhängige „Potentiale“	10
1.4.1 Beispiel: Lorentzkraft	10
2 Variationsprinzip	12
2.1 Variationsrechnung	12
2.2 Hamiltonsches Prinzip	14
2.2.1 Invarianz der Euler-Lagrange-Gleichungen	14
2.3 Variation mit Nebenbedingungen	15
2.3.1 Beispiel Pendel mit Fadenspannung	17
2.3.2 Beispiel Münze auf Keil (nichtholonome Zwangsbedingungen)	17
2.3.3 nichtintegrierte nichtholonome Zwangsbedingungen	21
2.4 Variation mit mehreren unabhängigen Variablen	22
3 Zwei-Körper-Problem	23
3.1 eindimensionale Probleme	23
3.1.1 allgemeines Verhalten in gegebenem Potential	23
3.1.2 Phasenraum-Portrait	24
3.1.3 periodische Bewegung	24
3.2 Zentralkräfte und Erhaltungsgrößen	25
3.3 Noether-Theorem	29
3.3.1 Beispiele	31
3.4 Kepler-Problem	31
4 Der starre Körper	36
4.1 Bezugssysteme	36
4.1.1 Die Euler-Winkel	39

Inhaltsverzeichnis

4.2	Trägheitstensor und Drehimpuls	40
4.2.1	Hauptträgheitsmomente	41
4.2.2	Drehimpuls des starren Körpers	42
4.2.3	Beispiele	43
4.3	Der kräftefreie starre Körper	43
4.3.1	analytische Beschreibung	44
4.3.2	Bewegung im raumfesten System	46
4.4	Der schwere symmetrische Kreisel	48
4.5	Bewegung in beschleunigten Bezugssystemen	48
5	Hamiltonsche Dynamik	50
5.1	Legendre-Transformation, Hamiltonsche Gleichungen	50
5.1.1	Beispiele	52
5.2	Kanonische Transformationen	52
5.2.1	Punkttransformationen im Phasenraum	52
5.2.2	erzeugende Funktion	53
5.2.3	Beispiel: infinitesimale Transformation durch Hamiltonfunktion	55
5.2.4	Beispiel: harmonischer Oszillator	56
5.2.5	Beispiel: Skalentransformation	56
5.3	Symplektische Struktur	56
5.4	Poisson-Klammern und kanonische Invarianten	58
5.4.1	Eigenschaften der Poisson-Klammern	58
5.4.2	Invarianz des Phasenvolumens	59
5.4.3	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen	59
5.5	Erhaltungssätze, Liouville-Theorem	60
5.5.1	Poisson-Theorem	60
5.5.2	statistische Beschreibung makroskopischer Systeme	61
5.6	Hamilton-Jacobi-Theorie	61
5.6.1	Separationsansatz für zeitunabhängigen Hamiltonian	62
5.6.2	Beispiele	63
6	Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik	64
6.1	kleine Schwingungen	64
6.1.1	Beispiel lineare Kette	66
6.2	Parametrische Resonanz	68
6.2.1	Beispiel: Federpendel mit oszillierendem Aufhängepunkt	70
6.2.2	Beispiel: Fadenpendel mit oszillierendem Aufhängepunkt	71
6.3	Anharmonische Oszillatoren	72
6.3.1	harmonische Lösung	72
6.3.2	Störungstheorie	73
6.3.3	sub-harmonische Schwingungen	75
6.4	Jenseits Störungsrechnung, Poincaré-Birkhoff-Theorem	76
7	Spezielle Relativität	77
7.1	Raum-Zeit-Diagramme	77

Inhaltsverzeichnis

7.2	Lorentz-Transformation	79
7.2.1	Relativistische Effekte	80
7.2.2	Poincaré-Transformation	82
7.3	Vierer-Notation	82
7.3.1	Der metrische Tensor	82
7.3.2	ko- und kontravariante Vierervektoren	83
7.4	Kräfte, kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen	85
7.5	Streuung relativistisch	87
7.6	Lagrange-Formalismus	87
7.6.1	Freies Teilchen	87
7.6.2	Teilchen in konservativem Kraftfeld	88
7.6.3	Beispiel: relativistischer harmonischer Oszillator	89
8	Relativistische Elektrodynamik	91
8.1	Transformation elektromagnetischer Felder	91
8.1.1	Feld einer bewegten Punktladung	92
8.2	Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld	94
8.2.1	Lagrange-Funktion für Punktmechanik und elektromagnetische Felder	96
8.3	Energie und Impuls	96
8.3.1	Freies elektromagnetisches Feld	97
8.3.2	Erhaltungssätze bei äußeren Quellen	99
8.4	Lösung der kovarianten Wellengleichung	99
9	Strahlung	104
9.1	Liénard-Wiechert-Potentiale	104
9.2	Strahlungsfelder beschleunigter Ladungen	104

1 Lagrange-Mechanik

1.1 Newtonsche Mechanik, d'Alembertsches Prinzip

1.1.1 Ansatz von Isaac Newton (1643–1727)

Beschreibung der Bewegung von Massepunkten im (3-dim) euklidischen Raum. Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

führt auf Bahnkurven $\vec{r}(t)$ im \mathbb{R}^3 .

Dabei müssen *alle* Kräfte explizit angegeben werden (insbesondere Zwangskräfte, die nur die Bewegung einschränken). In Inertialsystemen gilt:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Vorgehensweise zur Lösung eines mechanischen Problems

1. Bestimmung aller Kräfte (oft unter Zuhilfenahme komplizierter Winkelbeziehungen, *actio = reactio*, wo ist die Kraft? Schreiben wir sie hin!)
2. für jedes Teilchen die Newtonsche Bewegungsgleichung 1.1.1 aufstellen (ergibt bei N Teilchen $3N$ Gleichungen)
3. Bewegungsgleichungen lösen, um die Bahnkurven der Teilchen zu erhalten. Durch Rückeinsetzen der Lösungen lassen sich jetzt einfach die Zwangskräfte ausrechnen (falls gewünscht).

1.1.2 Ansatz von Josef Louis Lagrange (1736–1813)

Beschreibung der Bewegung im „Konfigurationsraum“ (differenzierbare Mannigfaltigkeit, „natürliche“ Variablen für das Problem, berücksichtigt Zwangsbedingungen). Kräfte müssen *nicht* explizit angegeben werden. Effizient: Zahl der Gleichungen ist gleich Zahl der physikalisch wesentlichen Variablen. Für den Ort eines Teilchens gilt:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(q_1(t), \dots, q_N(t), t).$$

1 Lagrange-Mechanik

Virtuelle Verschiebungen δq_i sind infinitesimale Änderungen der Variablen q_i , die mit den Zwangsbedingungen vereinbar sind und bei denen die Zeit festgehalten wird. Dabei werden die zeitlichen Ableitungen \dot{q}_i als ortsunabhängig betrachtet und nicht variiert (*stimmt das?*). Daher ändert sich bei einer virtuellen Verschiebung die kinetische Energie des Systems nicht. Jetzt lässt sich durch

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

die *virtuelle Arbeit* definieren, wobei $\delta \vec{r} = \vec{r}(q + \delta q) - \vec{r}(q) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i$ die gesamte virtuelle Verschiebung ist (analog gilt $\delta \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(q + \delta q) - \dot{\vec{r}}(q) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta \dot{q}_i$). Da $\delta \vec{r}$ senkrecht auf den Zwangskräften steht (weil die virtuellen Verschiebungen die Zwangsbedingungen berücksichtigen), müssen in \vec{F} nur tatsächlich wirksame Kräfte berücksichtigt werden.

Weiterhin lässt sich die Gleichung mit 1.1.1 umschreiben zu

$$\delta W - \dot{\vec{p}} \cdot \delta \vec{r} = 0$$

Außerdem gilt (Produktregel)

$$\dot{\vec{p}} \cdot \delta \vec{r} = \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \delta \vec{r}) - \vec{p} \cdot \frac{d(\delta \vec{r})}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \delta \vec{r}) - \vec{p} \cdot \delta \dot{\vec{r}}$$

Bezeichnet T die kinetische Energie (nichtrelativistisch: $T = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2$), so gilt für den Impuls

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}} \\ \vec{p} \cdot \delta \vec{r} &\stackrel{(1.1)}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}} \delta q = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta q = \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \\ \frac{\partial T}{\partial q} \delta q &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) \delta q = \underbrace{m \dot{\vec{r}}}_{\vec{p}} \underbrace{\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q}}_{\delta \dot{\vec{r}}} \delta q \end{aligned}$$

Insgesamt lässt sich aus den vorigen Gleichungen eine (Bewegungs-)Gleichung ableiten, die den Euler-Lagrange-Gleichungen (die später kommen) bereits sehr ähnlich sieht:

$$\delta W = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \delta q - \frac{\partial T}{\partial q} \delta q$$

Hat man mehr als eine dynamische Variable, so steht statt q immer eine Summe über diese Variablen in der Gleichung, wobei die Koeffizienten der δq_i einzeln verschwinden müssen (Verschiebungen sind unabhängig voneinander). Dadurch erhält man Bewegungsgleichungen in den Variablen q_i .

1.2 Allgemeiner Formalismus

Bisher musste stets nicht nur die kinetische Energie, sondern zusätzlich auch die virtuelle Arbeit bestimmt werden, um mit dem d'Alembertschen Prinzip Bewegungsgleichungen zu erhalten. Im Folgenden wird zunächst die virtuelle Arbeit durch *generalisierte Kräfte* ausgedrückt, um sie danach für konservative Systeme komplett durch die Lagrange-Funktion ersetzen zu können. Dafür zunächst ein paar Vorbemerkungen.

1.2.1 Klassifizierung von Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen schränken die Bewegung der Teilchen ein. Ohne Zwangsbedingungen hat ein System mit M Massepunkten $N = 3M$ Freiheitsgrade ($\hat{=}$ unabhängigen Koordinaten).

holonome Zwangsbedingungen sind darstellbar durch Gleichungen für Koordinaten und Zeit t

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_M, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

Beispiele: Bewegung längs einer Kurve/Fläche (x-y-Ebene: $z = 0$), starrer Körper ($(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{i,j}^2 = 0$).

nicht-holonome Zwangsbedingungen können beispielsweise durch Ungleichungen ($\vec{r}_i^2 < R^2$) oder Einschränkungen an die Geschwindigkeiten (Rollbedingung $v = R \cdot \dot{\varphi}$) gegeben sein.

skleronome Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig.

rheonome Zwangsbedingungen sind explizit zeitabhängig (vgl. Beispiel „Perle auf rotierendem Draht“: ein Freiheitsgrad, Einschränkung durch zeitabhängige Position des Drahtes).

1.2.2 Formalismus für holonome Zwangsbedingungen

In diesem Abschnitt wird für den häufigen Fall, dass holonome Zwangsbedingungen vorliegen, der Lagrange-Formalismus entwickelt. Für ein System mit M Teilchen und k *unabhängigen* Zwangsbedingungen (wichtig für starren Körper!) lassen sich durch ($f_i = 0$) k der $3M$ Freiheitsgrade eliminieren. Daher kann das System vollständig durch $N = 3M - k$ unabhängige *generalisierte Koordinaten* q_1, \dots, q_N beschrieben werden.

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, \dots, q_N, t) \\ \vec{v}_i &= \dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \end{aligned}$$

Da q_k , \dot{q}_k und t unabhängig sind, gilt für holonome Zwangsbedingungen

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (1.1)$$

1 Lagrange-Mechanik

Das haben wir für Kugelkoordinaten konkret nachgerechnet. *Gibt es einen allgemeinen Beweis?*

In den generalisierten Koordinaten kann man ebenfalls virtuelle Verschiebungen durchführen und die dabei anfallende virtuelle Arbeit betrachten.

$$\begin{aligned}\delta\vec{r}_i &= \sum_k \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta W &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_k \underbrace{\left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{=: \mathcal{F}_k} \delta q_k \\ \mathcal{F}_k &= \sum_{i=1}^M \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\delta W}{\delta q_k} \quad \text{„generalisierte Kräfte“} \quad (1.2)\end{aligned}$$

Dabei ist mit $\frac{\delta W}{\delta q_k}$ offenbar eine Ableitung von δW nach δq_k gemeint?! Weil $\mathcal{F}_k \cdot \delta q_k$ die Dimension einer Arbeit hat, hat \mathcal{F}_k nicht notwendigerweise die Dimension einer Kraft (generalisierte Koordinaten können bspw. Winkel sein).

Die kinetische Energie ist für nichtrelativistische und holonome Mehrteilchensysteme additiv:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 = T(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t)$$

Drückt man 1.1.2 durch \mathcal{F}_k und Ableitungen von T aus (und lässt die Koeffizienten von δq_k direkt einzeln verschwinden), erhält man

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \mathcal{F}_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

(„generalisierte Bewegungsgleichungen“).

Das ist noch allgemeingültig für *jedes* (Intertial-)System mit holonomen Zwangsbedingungen.

Konservative äußere Kräfte sind aus Potentialfunktionen herleitbar.

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= -\nabla_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_M), \quad i = 1, \dots, M \\ \Rightarrow \mathcal{F}_k &= \sum_{i=1}^M \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^M (\nabla_i V) \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \\ &\stackrel{1.3}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_k} = 0\end{aligned} \quad (1.4)$$

Da V unabhängig von \dot{q}_k ist, folgt mit der **Lagrange-Funktion**

$$\mathcal{L} := T - V \quad (1.5)$$

die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0} \quad (1.6)$$

1.2.3 Beispiel Fadenpendel

Aufbau Eine Punktmasse m ist über einen (masselosen) Faden der Länge l aufgehängt. Die Auslenkung zur Zeit t nennen wir $\varphi(t)$ (1 Freiheitsgrad). Dann ist der Ort der Punktmasse

$$\vec{r} = l \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = l \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (\dot{\vec{r}})^2 = l^2 \dot{\varphi}^2$$

und man erhält die Energien

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}})^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$V = mgz = -mgl \cos \varphi$$

und daraus die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi = ml \left(\frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi \right).$$

Eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichung (1.6) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi}) + mlg \sin \varphi \\ &= ml^2 \ddot{\varphi} + mlg \sin \varphi \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

In der Kleinwinkelnäherung $\sin \varphi \approx \varphi$ (die beim Fadenpendel genau genommen meistens nicht gilt) erhält man also wie erwartet den harmonischen Oszillator.

1.3 Hamiltonfunktion und kanonische Impulse

Die in diesem Abschnitt eingeführte *Hamiltonfunktion* ist (wie wir später sehen) die *Legendre-Transformierte* der Lagrange-Funktion. Was man mit der Hamiltonfunktion machen kann (Hamiltonsche Bewegungsgleichungen) findet sich im allgemeineren Teil in Kapitel 5.1.

1.3.1 kanonische Impulse

Es sei wieder $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t)$ die Lagrange-Funktion eines Systems. Dann heißt

$$p_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

der zu q_k *kanonisch konjugierte Impuls*. Ist weiterhin \mathcal{L} unabhängig von einer Koordinate q_k , so heißt q_k *zyklisch* und aus der Euler-Lagrange-Gleichung folgt sofort

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \dot{p}_k = 0 \\ &\Rightarrow p_k = \text{const} \end{aligned}$$

Man kann also an der Lagrange-Funktion unter Umständen direkt die Existenz von Erhaltungsgrößen ablesen.

1.3.2 Hamiltonfunktion

Ohne an dieser Stelle bereits zu wissen, wieso die folgenden Konstruktion sinnvoll ist, kann man zunächst die *Hamiltonfunktion*

$$H := \sum_{k=1}^N p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

definieren. Unter Verwendung von

$$\frac{d\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_k \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \ddot{q}_k + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

gilt dann für die zeitliche Entwicklung der Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{dp_k}{dt} \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \\ &= \sum_k \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \sum_k p_k \ddot{q}_k - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ &= \sum_k \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right)}_{=0 \text{ (Euler-Lagrange)}} \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned}$$

Also ist die Hamiltonfunktion genau dann eine zeitliche Konstante, wenn der Lagrangian nicht explizit zeitabhängig ist. Ist T eine quadratische Funktion in den generali-

1 Lagrange-Mechanik

sierten Geschwindigkeiten, dann gilt sogar

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_k \dot{q}_k \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}} - \mathcal{L} = 2T - (T - V) = T + V \\
 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\alpha_k \dot{q}_k^2) = 2\alpha_k \dot{q}_k
 \end{aligned}$$

und die Hamiltonfunktion entspricht gerade der Gesamtenergie des Systems.

1.4 Geschwindigkeitsabhängige „Potentiale“

Die Lagrangefunktion wie in (1.5) war nur mit einem gegebenen (Skalar-)Potential für ein konservatives Kraftfeld sinnvoll. Tatsächlich kann man diese Konstruktion aber auf geschwindigkeitsabhängige Potentiale verallgemeinern, was insbesondere die Elektrodynamik (Lorentzkraft) beschreibbar macht.

Genauer: Für die generalisierten Kräfte muss die Beziehung

$$\mathcal{F}_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

mit einem geeigneten Feld $U(q_k, \dot{q}_k)$ gelten. Setzt man das in die generalisierte Bewegungsgleichungen (1.3) ein (die waren sehr allgemein gültig), erhält man mit $\mathcal{L} = T - U$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \\
 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} &= 0 \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} &= 0
 \end{aligned}$$

also wieder die Euler-Lagrange-Gleichung.

1.4.1 Beispiel: Lorentzkraft

Wir betrachten eine Ladung q mit Masse m in einem elektromagnetischen Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Die Lorentzkraft lautet dann

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

und die elektromagnetischen Felder lassen sich mit

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

aus Potentialen $\phi(\vec{r}, t)$, $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ableiten. Durch geschicktes Raten erhält man den Ansatz $U = q\phi - q(\vec{v} \cdot \vec{A})$, womit sich die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \vec{v}^2 - q\phi + q(\vec{v} \cdot \vec{A})$$

1 Lagrange-Mechanik

und folgende Euler-Lagrange-Gleichung ergibt.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} \right) &= \frac{d}{dt} (m\vec{v} + q\vec{A}) \\
 &= m\dot{\vec{v}} + q \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}, t) \\
 &= m\dot{\vec{v}} + q \left((\nabla \vec{A}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\
 &\stackrel{!}{=} -\nabla U = -q\nabla\phi + q\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) \\
 \\
 \Rightarrow m\dot{\vec{v}} &= q \underbrace{\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{=\vec{E}} + q \underbrace{\left(\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \right)}_{=\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{v} \times \vec{B}} \\
 &= q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Die Wahl der „Potentialfunktion“ war also sinnvoll und man kann mit der oben angegebenen Lagrangefunktion jetzt die Bewegungsgleichungen aufstellen und versuchen, sie zu lösen.

2 Variationsprinzip

Im ersten Kapitel wurde aus dem Newtonschen Ansatz eine neue Theorie zur Beschreibung mechanischer Systeme gewonnen. Dabei wurde der Einfluss äußerer Kräfte auf das „Wackeln“ an den generalisierten Koordinaten bestimmt und durch unabhängiges Variieren dieser Koordinaten Bewegungsgleichungen aufgestellt. Das Variationsprinzip, das in diesem Kapitel behandelt wird, geht einen anderen Weg. Kennt man im Konfigurationsraum Anfangs- und Endpunkt einer Trajektorie, so betrachtet man zunächst alle möglichen Wege zwischen diesen Punkten und rechnet jeweils die *Wirkung* des Weges aus. Dann hofft man, dass der Weg mit extremaler Wirkung tatsächlich den physikalischen Pfad beschreibt.

Historisch hat die Variationsrechnung ihren Ursprung in der Lösung des „Brachistochronen-Problem“: Finde die Kurve, die zwei Punkte verbindet, entlang derer sich ein Teilchen unter dem Einfluss der Schwerkraft in kürzester Zeit bewegt. Johann Bernoulli fand 1696 die Lösung und läutete damit den Beginn der Variationsrechnung ein.

2.1 Variationsrechnung

Mathematisch betrachtet man zunächst Funktionen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mindestens einmal stetig diff'bar, blabla ...), wobei man den \mathbb{R}^n mit dem *Konfigurationsraum* identifiziert. Dann nennt man $x \in \mathbb{R}$ *unabhängige Variable* (z.B. die Zeit) und y eine *Trajektorie*.

Ferner sei eine Funktion

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F = F\left(y(x), \frac{dy}{dx}(x), x\right)$$

sowie $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann definiert man durch

$$I : C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto I[y] = \int_{x_0}^{x_1} dx F\left(y(x), \frac{dy}{dx}(x), x\right) \quad (2.1)$$

ein *Funktional*. Gesucht ist jetzt diejenige Funktion y , für die $I[y]$ stationär ist (also extremal oder mit einem Sattelpunkt). Bei dieser Funktion verschwindet dann die Variation des Funktionals

$$\delta I = I[y + \delta y] - I[y] \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.2)$$

wobei δy eine kleine Abweichung von der Trajektorie ist.

$$y \rightarrow y + \delta y, \quad \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} + \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \delta y$$

2 Variationsprinzip

Die Endpunkte $y(x_0), y(x_1)$ sollen fest sein, also $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$. Da die Variation infinitesimal sein soll, entwickelt man F in erster Ordnung im ersten und zweiten Argument.

$$F\left(y + \delta y, \frac{dy}{dx} + \delta \frac{dy}{dx}, x\right) = F\left(y(x), \frac{dy}{dx}(x), x\right) + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)} \delta \frac{dy}{dx} + \dots$$

Damit erhält man für die Variation des Funktionals (2.2)

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)} \cdot \underbrace{\delta \frac{dy}{dx}}_{= \frac{d}{dx} \delta y} \right)$$

und für den zweiten Summanden gilt

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)} \cdot \frac{d}{dx} \delta y \stackrel{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)} \cdot \delta y}_{=0, \text{ da } \delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)} \right) \cdot \delta y.$$

Also findet man, dass für beliebige (kleine) Variationen der Trajektorie gilt

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)} \right) \delta y \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.3)$$

Man kann sich jetzt leicht überlegen, dass dann bereits die Klammer verschwinden muss, da δy beliebig war (Annahme: Die Klammer verschwindet nicht, d.h. es gibt ein Intervall in (x_0, x_1) in dem die Klammer beispielsweise größer null ist. Dann könnte man aber δy so wählen, dass es nur auf diesem Intervall ungleich null ist und das Integral damit nicht verschwindet).

Achtung y bzw. δy können hier durchaus mehrdimensional sein! Dann sind die Ableitungen wieder mehrdimensional und die Multiplikation mit δy ist ein Skalarprodukt. Hier benötigt man aber, dass δy wirklich *in jede Richtung* beliebig (und unabhängig) gewählt werden kann (das funktioniert bei nichtholonomen Zwangsbedingungen im Allgemeinen nicht mehr).

Man kann also festhalten: Jede Trajektorie mit stationärer Wirkung erfüllt die Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}} \quad (2.4)$$

2.2 Hamiltonsches Prinzip

Wie im vorigen Abschnitt angedeutet, können wir zwar jetzt ausrechnen, welche Trajektorie die Wirkung minimiert. Was aber die Wirkung ist bzw. welchen Sinn es hat, sie zu minimieren, ist noch nicht klar. Für den Fall konservativer, holonomer Systeme kann man aber die Äquivalenz der Variationsrechnung und Newtons Bewegungsgleichung zeigen.

Hamiltonsches Prinzip der stationären Wirkung Die Wirkung $S[q]$ ist das Zeitintegral über den Lagrangian entlang eines Pfades $(q(t), \dot{q}(t))$, den ein physikalisches System durchläuft. Für den *physikalischen* Pfad q ist die Wirkung stationär (*grundlegendes Postulat der Mechanik konservativer Systeme*).

Also identifizieren wir in (2.1) und (2.4) F mit der Lagrange-Funktion, x mit der Zeit und y mit der Trajektorie im Konfigurationsraum. Für den physikalischen Pfad gilt dann

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}} \quad \text{bzw.}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N}$$

Man erhält also wieder die Euler-Lagrange-Gleichungen, was beweist, dass Hamiltons Prinzip der stationären Wirkung äquivalent zu Newtons drei Postulaten ist (zumindest in den Fällen, in denen beides gilt: konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen).

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

heißt *Variationsableitung*.

2.2.1 Invarianz der Euler-Lagrange-Gleichungen

Dadurch, dass wir das Hamiltonsche Prinzip nur unter Zuhilfenahme der Lagrange-Mechanik verifizieren konnten, haben wir eigentlich nichts gewonnen. Nach wie vor benötigt man explizit den Lagrangian, um Bewegungsgleichungen ausrechnen zu können und allgemeinere Systeme können wir mit Hamilton auch nicht beschreiben. Einen Vorteil haben wir jetzt jedoch: Bei der Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen aus dem Variationsprinzip haben wir nirgendwo explizit die Koordinaten benutzt (bzw. wir haben festgestellt, dass das für *jede* Wahl der Koordinaten gilt).

Genauer: Seien $\{q_k\}$, $\{Q_k\}$ Koordinatensysteme (zu jedem Zeitpunkt t gibt es eine invertierbare *Punkt-Transformation* $(\{q_k\}, t) \mapsto (\{Q_k\}, t)$). Dann gilt

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta Q_k} = 0$$

2 Variationsprinzip

falls $\tilde{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, t)$ die Lagrangefunktion ist, die nach Einsetzen der Punkt-Transformation in $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ folgt.

Weiterhin gibt es im wesentlichen drei Transformationen des Lagrangian, die auf invariante Bewegungsgleichungen führen.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} + \text{const}, \quad \mathcal{L} \cdot \text{const} \\ t &\longrightarrow t \cdot \text{const} \\ \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} + \frac{d}{dt}F(q, t)\end{aligned}$$

Die erste Transformation ist klar (additive Konstanten fallen beim Ableiten weg, multiplikative kann man aus der Ableitung herausziehen). Der Beweis zur zweiten *fehlt noch!* Die dritte Transformation lässt die Bewegungsgleichungen wegen folgender Beziehung invariant.

$$\begin{aligned}\frac{\delta\left(\frac{dF}{dt}\right)}{\delta q_k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{dF}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{dF}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) \right] - \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial t} - \sum_l \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial t} - \sum_l \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l \\ &= 0\end{aligned}$$

2.3 Variation mit Nebenbedingungen

Die Lagrange-Mechanik – so wie wir sie eingeführt haben – hatte einen großen Vorteil gegenüber der Newtonschen Mechanik bei der Bestimmung der physikalischen Entwicklung eines Systems, weil man nur so viele Gleichungen betrachtet, wie nötig sind. Während man jedoch nach Lösen der Bewegungsgleichungen im Newton-Ansatz direkt Zwangskräfte u.ä. ausrechnen kann, gehören diese in der Lagrange-Mechanik zu den wegrationalisierten Größen. Wir müssen also zusätzlichen Aufwand treiben, um solche Größen zu bestimmen.

Die Idee ist, nicht alle der holonomen Zwangsbedingungen zur Reduktion der Zahl der dynamischen Variablen zu verwenden. Man hat jetzt also bei N Freiheitsgraden $N + b$ dynamische Variablen q_k und b übrige Zwangsbedingungen

$$G_i(q_1, \dots, q_{N+b}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, b. \quad (2.5)$$

Die Variation der Wirkung δS aus (2.3) mit expliziter Summation hat folgende Form

$$\delta S = \int dt \left(\sum_{k=1}^{N+b} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} \cdot \delta q_k \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.6)$$

2 Variationsprinzip

wobei wir jetzt nicht mehr fordern können, dass die δq_k unabhängig voneinander sind, da noch Zwangsbedingungen zu berücksichtigen sind. Deshalb folgt *nicht*, dass die Koeffizienten von δq_k einzeln verschwinden.

Wir können aber ohne weiteres den Lagrangian mit sogenannten *Lagrange-Multiplikatoren* λ_i ergänzen.

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \sum_i \lambda_i G_i$$

Diese λ_i sind erstmal beliebige Funktionen der Zeit. Für die Variation von G_i gilt

$$\frac{\delta G_i}{\delta q_k} = \frac{\partial G_i}{\partial q_k},$$

weil G_i unabhängig von \dot{q}_k ist. Damit können wir wieder wie in (2.6) die Variation der Wirkung hinschreiben:

$$\delta S = \int dt \left\{ \sum_{k=1}^{N+b} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right\} \stackrel{!}{=} 0$$

Jetzt kommt der Trick: Man wählt λ_i gerade so, dass die Koeffizienten von $\delta q_{N+1}, \dots, \delta q_{N+b}$ verschwinden.

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial q_k} = 0, \quad k = N+1, \dots, N+b \quad (2.7)$$

Dann ist

$$\sum_{k=1}^{N+b} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

und hier kann jedes δq_k wieder unabhängig variiert werden. Es gilt also auch

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Aus (2.7), (2.8) sowie (2.5) erhält man also insgesamt $N + 2b$ Gleichungen, was wunderbar zu den $N + 2b$ Unbekannten $q_1, \dots, q_N, q_{N+1}, \dots, q_{N+b}, \lambda_1, \dots, \lambda_b$ passt.

Der aufmerksame Leser hat gemerkt, dass man Probleme bekommt, falls für ein k in (2.7) *keines* der G_i von q_k abhängt. Dann ließe sich die Gleichung nicht nach λ_i auflösen. In diesem Fall hat man offenbar seine generalisierten Koordinaten ungeschickt sortiert. Das ist aber kein Problem, wenn wir direkt das gesamte Gleichungssystem betrachten. Spätestens in (2.8) tauchen genug Gleichungen auf, um λ_i zu bestimmen (falls nicht, waren die übrigens Zwangsbedingungen G_i nicht unabhängig).

In Analogie zu (1.2) definiert man durch

$$\mathcal{N}_k = \sum_{i=1}^b \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^M \vec{N}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}$$

generalisierte Zwangskräfte. Dabei ist \vec{N}_j die Zwangskraft auf die Punktmasse m_j .

2.3.1 Beispiel Pendel mit Fadenspannung

Wir wollen das Beispiel aus Abschnitt 1.2.3 noch einmal betrachten, interessieren uns diesmal aber nicht nur für die Bewegung des Pendels, sondern zusätzlich auch für die Spannung, die der Faden (und damit auch die Aufhängung) aushalten muss. Wir führen also eine neue dynamische Variable r ein, die den Abstand der Masse zur Aufhängung beschreibt. Damit erhalten wir als zusätzliche Zwangsbedingung die Gleichung

$$G(r, \varphi) = r - l = 0.$$

Analog zu 1.2.3 gilt jetzt (mit Produktregel)

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = r\dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \dot{r} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (\dot{\vec{r}})^2 = r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2$$

und

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} (r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + mgr \cos \varphi.$$

Mit dem Lagrange-Multiplikator λ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta r} + \lambda \frac{\partial G}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi - m\ddot{r} + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \varphi} &= -mgr \sin \varphi - \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) \stackrel{!}{=} 0 \\ G(r, \varphi) &= r - l \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Jetzt darf man die letzte Gleichung wieder benutzen, um das r (und sämtliche zeitlichen Ableitungen) zu eliminieren und man erhält

$$\begin{aligned} \lambda &= \underbrace{m\ddot{r}}_{=0} - mr\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi = -m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält für λ gerade die Fadenspannung (Gewichtskraft in radialer Richtung + Fliehkraft) und als zweite Gleichung wieder die Bewegungsgleichung wie in 1.2.3.

2.3.2 Beispiel Münze auf Keil (nichtholonome Zwangsbedingungen)

Aufbau Eine Münze mit Radius R steht aufrecht auf einem (ruhenden) Keil mit Neigungswinkel α . Der Auflagepunkt wird durch x - und y -Koordinaten auf der Schräge beschrieben. Der Winkel θ beschreibt die Rollrichtung (also die Drehung der Münze um die Normale der Schräge – die Hochachse), während φ für die Drehung der Münze um ihre „Rollachse“ steht.

Es liegt also ein System mit zwei Freiheitsgraden vor, das wir mit vier Variablen vollständig beschreiben können. Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{mR^2}{2} \left(\frac{3}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}\dot{\theta}^2 \right) - mgy \sin \alpha$$

2 Variationsprinzip

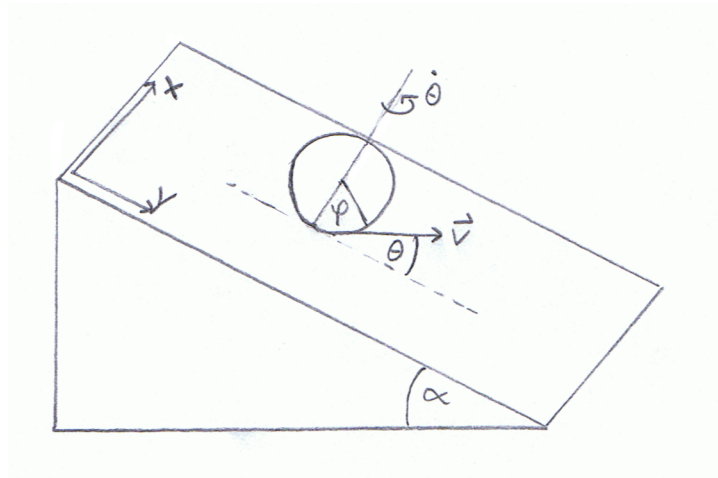


Abbildung 2.1: Skizze des Aufbaus

wobei sich in der kinetischen Energie Anteile aus der Translation des Schwerpunktes, der Rotation um die „Rollachse“ und der Rotation um die Hochachse aufsummieren. An dieser Stelle fällt auf, dass nur drei Variablen überhaupt relevant sind. Wir haben also effektiv nur 3 *dynamische Variablen* y, θ, φ bei 2 Freiheitsgraden.

Weiterhin soll die Münze *rollen*, es gibt also einschränkende Bedingungen:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= R\dot{\varphi} \\ \Rightarrow \dot{x} &= R\dot{\varphi} \sin \theta, \quad \dot{y} = R\dot{\varphi} \cos \theta \end{aligned}$$

Allerdings sind diese Zwangsbedingungen nicht holonom und auch nicht durch Integration in holonome Zwangsbedingungen zu überführen („nichtintegrale Gleichungen“). Es ist also nicht direkt möglich, Lagrange-Multiplikatoren in der Form

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \lambda G$$

einzuführen, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

Das Einzige, was bleibt, ist an den Anfang zurück zu gehen: Wir betrachten virtuelle Verschiebungen, die aber die Zwangsbedingung

$$\delta y = R \cos \theta \delta \varphi$$

erfüllen müssen. Dadurch können wir bei der Variation des Wirkungsintegrals den verschwindenden Term $\lambda(\delta y - R \cos \theta \delta \varphi)$ hinzuaddieren, um wieder einen Lagrange-Multiplikator zu erhalten.

$$\delta S = \int dt \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y} \delta y + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta} \delta \theta + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi + \lambda(\delta y - R \cos \theta \delta \varphi) \right) \stackrel{!}{=} 0$$

2 Variationsprinzip

Durch den zusätzlichen λ -Term können wir wieder (wie bei holonomen Zwangsbedingungen) die Koeffizienten der Variationen der Koordinaten verschwinden lassen und finden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \sim \delta y : & & -mg \sin \alpha + \lambda &= 0 \\ \sim \delta \varphi : & & \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} - \lambda R \cos \theta &= 0 \\ \sim \delta \theta : & & \frac{mR^2}{4}\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Integration $\varphi(t), \theta(t)$. $x(t)$ und $y(t)$ folgen dann aus den Zwangsbedingungen. Weil ich glaubte, einen Widerspruch in einem Grenzübergang gefunden zu haben, habe ich die Lösungen für drei Arten von Anfangsbedingungen hier notiert. Inzwischen hat sich meine Verwirrung einigermaßen gelegt. Ich lasse es hier aber stehen, weil es jetzt ohnehin geTeXt ist. Wen das nicht interessiert: Weiter gehts auf Seite 21.

Zunächst kann man die unterste Gleichung allgemein durch

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \theta &= \omega t + \theta_0 \end{aligned}$$

mit den Integrationskonstanten ω und θ_0 lösen.

1. Fall: Münze rollt gerade herunter Dies ist der einfachste Fall, bei dem die Münze keinerlei Rotation um ihre Hochachse vollführt. Die Anfangsbedingungen sind also $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Daraus folgt direkt für die Integrationskonstanten $\omega = \theta_0 = 0$ und die mittlere der Bewegungsgleichungen vereinfacht sich zu

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} - mg \sin(\alpha)R \cos(0) = 0 \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{\varphi} &= \frac{2g \sin \alpha}{3R} \\ \dot{\varphi} &= \frac{2g \sin \alpha}{3R}t + \dot{\varphi}_0 \\ \varphi &= \frac{2g \sin \alpha}{3R}t^2 + \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0 \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit wegen integriert man jetzt noch die Zwangsbedingungen, um die Position des Auflagepunktes zu bekommen.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= \frac{2}{3}g \sin(\alpha)t^2 + R\dot{\varphi}_0 t + y_0 \end{aligned}$$

Man erhält also (wie zu erwarten war) eine beschleunigte Bewegung, wobei sich die Münze geradlinig den Keil hinabbewegt. Soweit so logisch.

2 Variationsprinzip

2. Fall: Münze rollt schräg Betrachtet man nun den Fall, dass die Münze nicht gerade startet, sondern $\theta(0) = \theta_0 \neq 0$ gilt, so hat man in (2.9) statt $\cos(0)$ einen Term $\cos(\theta_0)$, der sich durch die Bewegungsgleichungen durchzieht. Der quadratische Term in der Lösung für φ kann also (falls die Münze am Anfang „rückwärts“ – also bergauf – rollt) negativ sein, so dass er erst nach einer bestimmten Zeit den linearen und konstanten Term kompensiert und die Münze erst dann wieder bergab rollt. Klarer wird das in der expliziten Lösung für die Position des Auflagepunktes:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{2}{3} g \sin(\alpha) \cos(\theta_0) t^2 + R \dot{\varphi}_0 t \right) \sin(\theta_0) + x_0 \\ &= \frac{1}{3} g \sin(\alpha) \sin(2\theta_0) t^2 + R \sin(\theta_0) \dot{\varphi}_0 t + x_0 \\ y(t) &= \left(\frac{2}{3} g \sin(\alpha) \cos(\theta_0) t^2 + R \dot{\varphi}_0 t \right) \cos(\theta_0) + y_0 \\ &= \frac{2}{3} g \sin(\alpha) \cos^2(\theta_0) t^2 + R \cos(\theta_0) \dot{\varphi}_0 t + y_0 \end{aligned}$$

Das ist ebenfalls logisch und sinnvoll.

3. Fall: Münze rotiert um die Hochachse In der Situation, dass die Münze nicht nur schräg steht, sondern zusätzlich einen Drehimpuls in Richtung der Hochachse trägt, erwarten wir ein weniger triviales Verhalten. Die Anfangsbedingungen seien $\dot{\theta}(0) = \omega \neq 0, \theta(0) = \theta_0, \dot{\varphi}(0) = 0, \varphi(0) = 0$, d.h. wir fordern, dass die Münze anfangs bis auf ihre Rotation ruht. Zunächst erhält man die mittlere Bewegungsgleichung wieder in einer neuen Form:

$$\frac{3}{2} m R^2 \ddot{\varphi} = m g \sin \alpha R \cos(\omega t + \theta_0)$$

Durch Integration findet man

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{R} \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \theta_0) + a \right) \\ \varphi &= \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{R} \left(-\frac{1}{\omega^2} \cos(\omega t + \theta_0) + at + b \right) \end{aligned}$$

und wegen der Anfangsbedingungen gilt $a = \frac{1}{\omega} \sin(\theta_0), b = \frac{1}{\omega^2} \cos(\theta_0)$. Damit ist die Lösung für $\dot{\varphi}$ und φ

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{R} \left(\frac{1}{\omega} (\sin(\omega t + \theta_0) + \sin(\theta_0)) \right) \\ \varphi &= \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{R} \left(\frac{1}{\omega^2} (\cos(\theta_0) - \cos(\omega t + \theta_0)) + \frac{1}{\omega} \sin(\theta_0) t \right) \end{aligned}$$

2 Variationsprinzip

Für die Position des Auflagepunktes erhält man (mit Mathematica)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{2}{3}g \sin \alpha \int dt \left(\frac{1}{\omega} (\sin(\omega t + \theta_0) + \sin(\theta_0)) \sin(\omega t + \theta_0) \right) \\
 &= \frac{2}{3}g \sin \alpha \frac{1}{4\omega^2} \left(2 \sin \omega t - \sin(2\omega t + 2\theta_0) + 2(\omega t + \theta_0 - \sin(\omega t + 2\theta_0)) \right) + x_0 \\
 y(t) &= \frac{2}{3}g \sin \alpha \int dt \left(\frac{1}{\omega} (\sin(\omega t + \theta_0) + \sin(\theta_0)) \cos(\omega t + \theta_0) \right) \\
 &= \frac{2}{3}g \sin \alpha \frac{1}{2\omega^2} \left(2 \sin(\theta_0) \sin(\omega t + \theta_0) - \cos^2(\omega t + \theta_0) \right) + y_0
 \end{aligned}$$

Die damit resultierende Bahn hat qualitativ die Form wie in Abbildung 2.2 zu sehen.

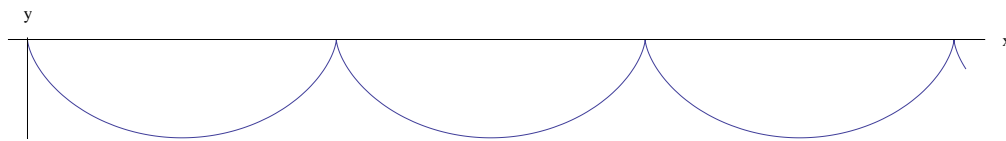


Abbildung 2.2: Bahn der Münze bei nichtverschwindendem Drehimpuls in Richtung der Hochachse

Auf den ersten Blick ist das etwas unintuitiv – auf den zweiten Blick aber klar. Die Münze nimmt auf dem Weg nach unten Geschwindigkeit auf, dreht sich aber kontinuierlich weiter und fängt irgendwann an, wieder nach oben zu rollen (umkippen kann sie ja nicht). Dort bleibt sie auf Höhe ihrer Startposition einen Moment stehen (dreht sich dabei aber weiter um ihre Hochachse). Wenn sie sich wieder auf den Weg nach unten macht, ist die Münze bereits wieder so ausgerichtet wie am Anfang (ich habe hier $\theta_0 = 0$ gewählt). Für andere Anfangsrichtungen ergeben sich ebenfalls interessante Figuren.

Wahrscheinlich funktioniert der Grenzfall $\omega \rightarrow 0$, wenn man die Reihendarstellung der Winkelfunktionen verwendet (da sollte ja für y wieder etwas quadratisches in t herauskommen). Das war, was mir zunächst Probleme bereitet hatte. Ich denke, das müsste aber so funktionieren...

2.3.3 nichtintegrale nichtholonome Zwangsbedingungen

Das Vorgehen beim letzten Beispiel kann man verallgemeinern. Liegen zwischen den $N + b$ dynamischen Variablen nichtholonome Beziehungen der Form

$$\sum_{k=1}^{N+b} a_{i,k}(q, t) \dot{q}_k + b_i(q, t) = 0, \quad i = 1, \dots, b$$

2 Variationsprinzip

vor, so hat man zu einer festen Zeit t *lineare Relationen* zwischen den virtuellen Verschiebungen

$$\sum_{k=1}^{N+b} a_{i,k}(q, t) \delta q_k = 0.$$

Daher gilt (wie im Beispiel) für die Variation

$$\delta S = \int dt \left\{ \underbrace{\sum_k \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} + \sum_{i=1}^b \lambda_i(t) a_{i,k}(q, t) \right)}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ Bewegungsgleichungen}} \delta q_k \right\} \stackrel{!}{=} 0.$$

2.4 Variation mit mehreren unabhängigen Variablen

Bisher wurden Probleme betrachtet, deren Lösungen Funktionen einer Variablen waren (üblicherweise der Zeit). Es gibt aber Problemstellungen, in denen man weitere Variablen (z.B. räumliche) betrachten möchte.

Ein Beispiel ist die Schwingung einer Saite, die an beiden Enden eingespannt ist. Dort kann man sich einerseits einen Punkt der Saite nehmen und seine Auslenkung in Abhängigkeit der *Zeit* betrachten. Andererseits kann man zu einer festen *Zeit* ein „Foto“ der Saite machen und die Auslenkung in Abhängigkeit vom *Ort* untersuchen.

Die Auslenkung q als dynamische Variable ist also eine Funktion der unabhängigen Variablen x und t . Für den Lagrangian gilt damit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(q(x, t), \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial t}, x, t \right)$$

und die Wirkung ist ein Doppelintegral über t und x .

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L}$$

\mathcal{L} heißt jetzt *Lagrange-Dichte*. Die Variation ändert sich jetzt auch gemäß

$$\begin{aligned} q &\rightarrow q + \delta q \\ \frac{\partial q}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \delta q \\ \frac{\partial q}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \delta q \end{aligned}$$

und die Euler-Lagrange-Gleichungen haben jetzt die Form einer partiellen Differentialgleichung für $q(x, t)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)} = 0$$

3 Zwei-Körper-Problem

3.1 eindimensionale Probleme

In diesem Abschnitt betrachten wir Systeme, von denen wir einige Eigenschaften fordern, die aber dennoch sehr allgemein eine Klasse von Problemen beschreiben. So soll das System (wie die Überschrift bereits nahelegt) nur einen Freiheitsgrad haben. Weiterhin soll der Lagrangian nicht explizit zeitabhängig sein, es gilt also $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$.

Daraus folgt bereits (vgl. Kapitel 1.3.2), dass die Hamiltonfunktion eine Konstante der Bewegung ist. Da wir weiter fordern, dass die kinetische Energie quadratisch in \dot{q} ist (durch Skalierung der Zeit wählen wir $T = \frac{1}{2}\dot{q}$), gilt sogar

$$H = E = T + V = \frac{1}{2}\dot{q} + V(q).$$

Für physikalische Lösungen ist die kinetische Energie positiv, also gilt

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \pm\sqrt{2T} \\ &= \pm\sqrt{2(E - V(q))}\end{aligned}\tag{3.1}$$

mit $E \geq V(q)$.

3.1.1 allgemeines Verhalten in gegebenem Potential

Man kann jetzt allgemein diskutieren, was für bestimmte Energien (die nur von den Anfangsbedingungen abhängen) passiert, wenn man das Potential wie in Abbildung 3.1 kennt.

$E \gtrsim E_0$: Das Potential kann für kleine Auslenkungen „getaylor“ werden

$$V(q) \simeq E_0 + \frac{k}{2}(q - q_0)^2 + \dots$$

(harmonischer Oszillator).

$E_0 < E < E_1$: periodische (nicht unbedingt harmonische) Lösungen mit Umkehrpunkten q_{\min} und q_{\max} . Die Periodendauer T_{Periode} ist eine Funktion der Energie.

$E = E_1$: instabiles Gleichgewicht bei q_{\min} . Für $q \rightarrow q_{\min}$ geht \dot{q} gegen 0 und das System „bleibt stecken“ ($T_{\text{Periode}} \rightarrow \infty$).

$E < E_1$ **oder** $q(t=0) < q_*$: keine periodische Bewegung ($q \rightarrow -\infty$).

3 Zwei-Körper-Problem

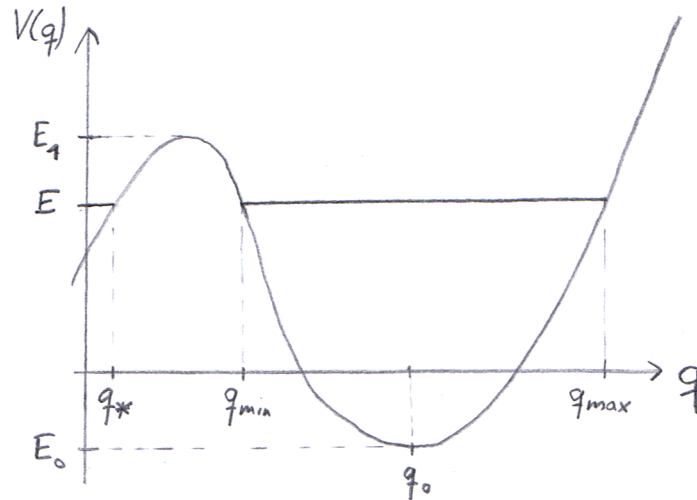


Abbildung 3.1: mögliches Potential

3.1.2 Phasenraum-Portrait

Man kann die Entwicklung eines Systems im sogenannten *Phasenraum* beschreiben. Hier ist das ein zweidimensionaler Raum, der aus Paaren (q, \dot{q}) besteht. Allgemein ist der Phasenraum für ein System mit N Freiheitsgraden $2N$ -dimensional. Die Trajektorien (also Lösungen von (3.1)) werden durch Erhaltungsgrößen eingeschränkt. Genauer: bei N Freiheitsgraden und k Erhaltungsgrößen sind die Trajektorien $(2N - k)$ -dimensionale Unterräume des Phasenraums (hier: Kurven). Im Detail wird der Phasenraum später (in Kapitel 5) betrachtet.

Geschlossene Linien im Phasenraumportrait sind periodische Lösungen (hier für $E < E_1$). Trajektorien überschneiden sich nicht (sonst könnte man nicht bestimmt sagen, wie sich das System vom Schnittpunkt aus entwickelt), aber beispielsweise beim lokalen Potentialmaximum nähern sich die Hyperbeln beliebig nahe an (aus allen vier Richtungen!).

3.1.3 periodische Bewegung

Durch Trennung der Variablen mit der Anfangsbedingung $q(0) = q_0$ kann man (3.1) lösen (zumindest, wenn einem ein Integral als Lösung reicht)

$$t = \pm \int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq'}{\sqrt{2(E - V(q'))}}$$

3 Zwei-Körper-Problem

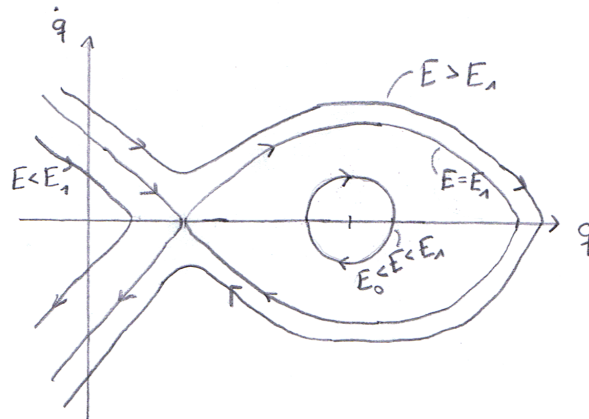


Abbildung 3.2: Phasenraumportrait für das Potential aus Abbildung 3.1

Eine explizite Lösung $t(q)$ oder $q(t)$ lässt sich daraus jedoch im Allgemeinen *nicht* gewinnen. Für eine periodische Bewegung kann man die Periodendauer mit

$$T_{\text{Periode}} = \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{dq'}{\sqrt{2(E - V(q'))}}$$

berechnen.

3.2 Zentralkräfte und Erhaltungsgrößen

Nach den allgemeinen Betrachtungen im vorigen Abschnitt geht es nun konkret um ein System aus zwei Punktmassen (\Rightarrow 6 Freiheitsgrade). Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale hat der Lagrangian allgemein die folgende Form.

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}(\dot{\vec{r}}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\vec{r}}_2)^2 - V_{\text{ext}}^{(1)}(\vec{r}_1) - V_{\text{ext}}^{(2)}(\vec{r}_2) - V_{1,2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Betrachtet man ein abgeschlossenes System ($V_{\text{ext}}^{(i)}(\vec{r}) = 0$) und als Wechselwirkung zwischen den Punktmassen nur Zentralkräfte ($V_{1,2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_{1,2}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$), vereinfacht sich der Lagrangian zu

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}(\dot{\vec{r}}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\vec{r}}_2)^2 - V_{1,2}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

und man sieht, dass der Lagrangian invariant unter Translation des Koordinatensystems ist. Es gilt also für alle Vektoren \vec{a} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) &= \mathcal{L}(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) \\ &= \mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) + \vec{a} \cdot (\nabla_1 + \nabla_2)\mathcal{L} + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned}$$

3 Zwei-Körper-Problem

$$\Rightarrow \nabla_1 \mathcal{L} + \nabla_2 \mathcal{L} = 0$$

Unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen findet man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \nabla_i \mathcal{L} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) &= \nabla_1 \mathcal{L} + \nabla_2 \mathcal{L} = 0 \end{aligned}$$

Also ist der Gesamtimpuls erhalten! Dann bewegt sich der Schwerpunkt des Systems

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

wie ein freies Teilchen. Bezeichnet ferner $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ den Abstandsvektor zwischen den beiden Punktmassen, können wir mit einem Variablenwechsel $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{R}, \vec{r})$ die Gleichungen umschreiben

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, & \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ T &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \underbrace{(\dots)}_{=0} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{=: \mu \text{ „reduzierte Masse“}} \dot{\vec{r}}^2 \\ \mathcal{L} &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) \end{aligned}$$

Führt man nun einen Koordinatenwechsel ins Schwerpunktsystem durch (das darf man, weil der Lagrange-Formalismus unabhängig vom Koordinatensystem ist), gilt $\dot{\vec{R}} = 0$ und man erhält den Anteil der Relativbewegung an der Lagrangefunktion.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

Durch Elimination der Schwerpunktbewegung, die mit gegebenen Anfangsbedingungen trivial zu beschreiben ist, haben wir also auf einen Schlag drei Freiheitsgrade loswerden können. Offensichtlich ist der Lagrangian jetzt invariant unter Drehungen (Potential hängt nur vom Abstand ab). Dadurch kann man ähnlich wie bei der Translationsinvarianz wieder eine Aussage für kleine Drehungen gewinnen.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) &= \mathcal{L}(\vec{r} + \vec{\phi} \times \vec{r}, \dot{\vec{r}} + \vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) + (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} + (\vec{\phi} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} + \mathcal{O}(\phi^2) \\ &= \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - \vec{\phi} \cdot \left(\vec{r} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) + \mathcal{O}(\phi^2) \\ \Rightarrow 0 &= \vec{r} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \stackrel{\text{E.L.}}{=} \vec{r} \times \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) + \dot{\vec{r}} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) \end{aligned}$$

3 Zwei-Körper-Problem

Wir haben also erneut aus einer Symmetrie eine Erhaltungsgröße, nämlich den *Drehimpuls*, erhalten.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \text{const} \quad (3.2)$$

Also liegen Relativgeschwindigkeit und -abstand in einer Ebene, deren Normale \vec{L} ist. Das Problem lässt sich jetzt also durch nur noch zwei Variablen (ebene Polarkoordinaten ρ, φ) beschreiben. Die Lagrange-Funktion lautet nach diesem Variablenwechsel

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - V(\rho) \quad (3.3)$$

und man sieht sofort eine weitere Erhaltungsgröße, weil φ zyklisch ist.

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu \rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} = L \\ \iff \dot{\varphi} &= \frac{L}{\mu \rho^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Falls $\rho(t)$ bekannt ist, erhält man $\varphi(t)$ durch Integration. Man sieht der Lagrange-Funktion (3.3) sogar noch eine Erhaltungsgröße an. Weil sie nicht explizit zeitabhängig ist, ist die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H &= \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} = E = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + V(\rho) \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu\rho^2}}_{=: V_{\text{eff}}} + V(\rho) = \text{const} \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit dem *Zentrifugalpotential* $\frac{L^2}{2\mu\rho^2}$ erhalten. Dies ist mit Anfangsbedingungen eine Differentialgleichung für ρ , die äquivalent ist zu der, die man aus den Euler-Lagrange-Gleichungen erhält

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} &= \frac{d}{dt} \mu \dot{\rho} - \mu \rho \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ &= \mu \ddot{\rho} - \frac{L}{\mu \rho^3} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

2. Keplersches Gesetz Mit den Überlegungen, die wir insbesondere in (3.2) haben einfließen lassen, kann man einen weiteren interessanten Sachverhalt zeigen. Gemäß Abbildung 3.3 ist die Fläche, die vom „Leitstrahl“ überstrichen wird

$$dF = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi$$

und daher die *Flächengeschwindigkeit*

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} \sim L \quad (3.6)$$

konstant. Das führt zur typischen Beschleunigung von astronomischen Objekten, wenn ihre Bahn der eines anderen Himmelskörpers sehr nahe kommt.

3 Zwei-Körper-Problem

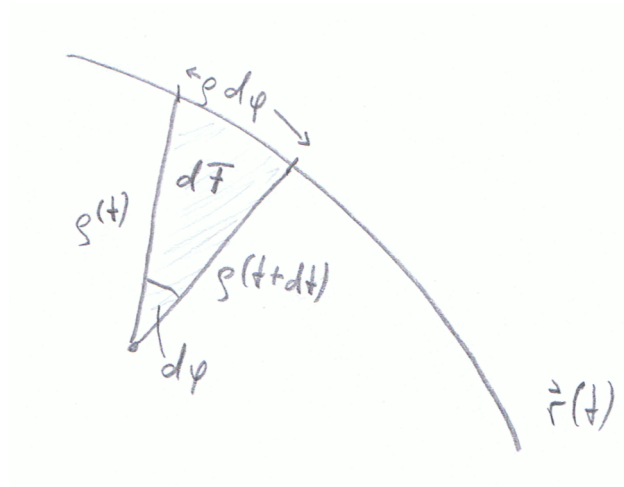


Abbildung 3.3: die Flächengeschwindigkeit ist konstant

periodische Bewegung Für gewisse Einschränkungen an das Potential V kann man die Bewegung des Systems qualitativ beschreiben. Wir wollen ein Potential ähnlich dem Gravitationspotential betrachten: Im Unendlichen soll es verschwinden und für kleine Abstände „nicht zu attraktiv“ sein (genauer: V_{eff} soll für kleine Abstände nicht attraktiv sein). Dann erhält man ein effektives Potential wie in Abbildung 3.4.

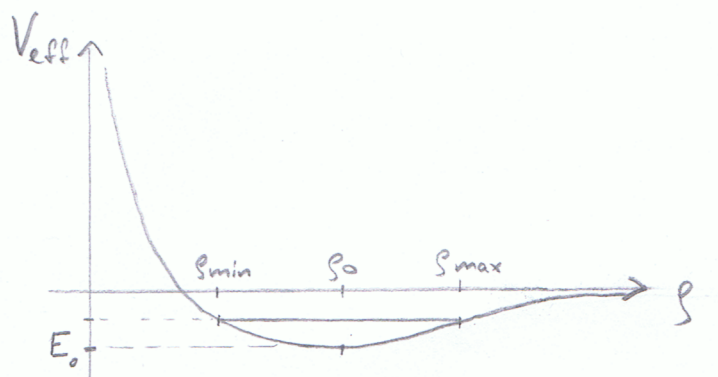


Abbildung 3.4: ein Potential, das unseren Einschränkungen genügt

Die Bewegung sieht dann ähnlich wie in Abbildung 3.5 aus und die Winkeländerung

3 Zwei-Körper-Problem

während einer Periode der Radialbewegung lässt sich berechnen durch

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \int \dot{\varphi} dt \\ &= \frac{L}{\mu} \int \frac{dt}{\rho(t)^2} \\ &\stackrel{(3.5)}{=} \frac{2L}{\mu} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\rho^2} \left(\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(\rho)) \right)\end{aligned}$$

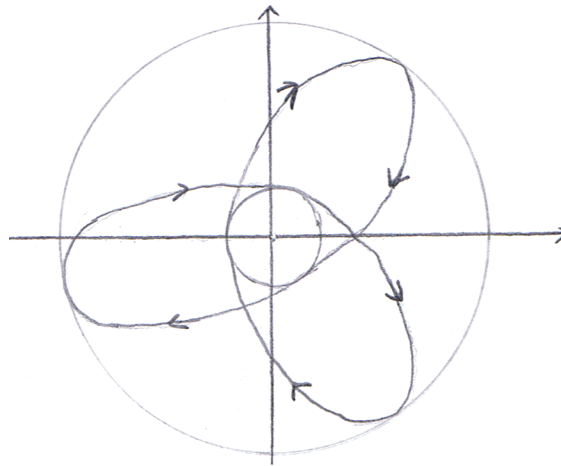


Abbildung 3.5: mögliche Bewegung in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls

Phasenraum-Portrait – Poincaré-Schnitt Anders als in Abschnitt 3.1.2 liegt diesmal ein System mit zwei Freiheitsgraden vor, es wird uns also schwerfallen, den Phasenraum anschaulich darzustellen. Deshalb bedient man sich des sogenannten *Poincaré-Schnitts*, bei dem in der ρ - $\dot{\rho}$ -Ebene die Nulldurchgänge von φ markiert werden:

$$(\rho, \dot{\rho})|_{t_n} : \varphi(t_n) = 0$$

Für verschiedene Anfangsbedingungen liegen diese Punkte dann auf Kurven konstanter Energie (3.5).

3.3 Noether-Theorem (Emmy Noether, 1882–1935)

Im vorigen Kapitel haben wir mehrfach ein Verfahren angewandt, was hier zu einem allgemeinen Vorgehen zur Beschaffung von Erhaltungsgrößen ausgeweitet werden soll.

3 Zwei-Körper-Problem

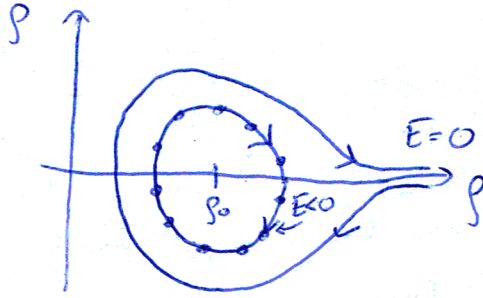


Abbildung 3.6: Poincaré-Schnitt für zwei verschiedene Anfangszustände

Ausgangspunkt war stets die Existenz einer Invarianz unter bestimmten Transformationen (Translations-/Rotationsinvarianz sind die häufigsten). Das soll auch hier weiterhelfen.

Sei Q_s eine (einparametrische) Koordinaten-Transformation

$$Q_s : q(t) \mapsto Q_s(q(t)) = Q_s(t)$$

mit einem kontinuierlichen Parameter s , für den gilt

$$Q_{s=0}(q(t)) = q(t).$$

Q_s heißt *Symmetrie* oder *Symmetrie-Transformation*, falls das Wirkungsfunktional invariant unter Q_s ist.

$$S[q] = S[Q_s(q)]$$

Dann ist mit $q(t)$ auch $Q_s(t)$ Lösung der Bewegungsgleichungen und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} S[Q_s] = \frac{d}{ds} \int_0^{t_1} dt \mathcal{L}(Q_s, \dot{Q}_s, t) \\ &= \int_0^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_s} \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_s} \cdot \frac{\partial \dot{Q}_s}{\partial s} \right\} \\ &= \int_0^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_s} \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_s} \right) \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_s} \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} \Big|_0^{t_1} \\ &= \int_0^{t_1} dt \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_s} \right) \right\}}_{=0 \text{ (Euler-Lagrange-Gleichung)}} \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_s} \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} \Big|_0^{t_1} \end{aligned}$$

Und da t_1 beliebig war, finden wir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_s} \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} \right) = 0.$$

3 Zwei-Körper-Problem

Für $s \rightarrow 0$ (damit wir die „alten“ kanonischen Impulse verwenden können) haben wir eine Erhaltungsgröße

$$I(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = p \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} \Big|_{s=0} = \sum_{k=1}^N p_k \frac{\partial (Q_s)_{(k)}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \text{const}$$

Analog kann man zeigen (haben wir in der Vorlesung nicht gemacht), dass eine n -parametrische Symmetrie auf n Erhaltungsgrößen führt (Rotationssymmetrie (drei Parameter) führt auf Drehimpulserhaltung (drei Komponenten)).

Falls die Zeit mittransformiert wird (die transformierte Zeit sei τ_s mit $\tau_0 = t$), kann man zeigen, dass dann die Erhaltungsgröße

$$I(q, \dot{q}, t) = p \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} \Big|_{s=0} + \mathcal{L} \cdot \frac{\partial \tau_s}{\partial s} \Big|_{s=0}$$

existiert.

Offenbar ist es hinreichend für die Invarianz der Wirkung, wenn bereits der Lagrangian unter der Transformation invariant ist.

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(Q_s, \dot{Q}_s, \tau_s) = 0$$

Das ist der einfachste Weg, um zu überprüfen, ob eine gegebene Transformation eine Symmetrie ist.

3.3.1 Beispiele

folgen

3.4 Kepler-Problem

Als Spezialfall der allgemeinen Betrachtungen in diesem Kapitel wollen wir uns mit dem Kepler-Problem – das zwei-Körper-Problem im Gravitationsfeld – beschäftigen. Das Potential V lautet dann

$$V(\rho) = -G \frac{m_1 m_2}{\rho}$$

und mit den Konstanten

$$k = Gm_1 m_2 > 0, \quad \beta = \frac{L^2}{2\mu}$$

wird das effektive Potential zu

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^2}.$$

Es hat ein Minimum bei

3 Zwei-Körper-Problem

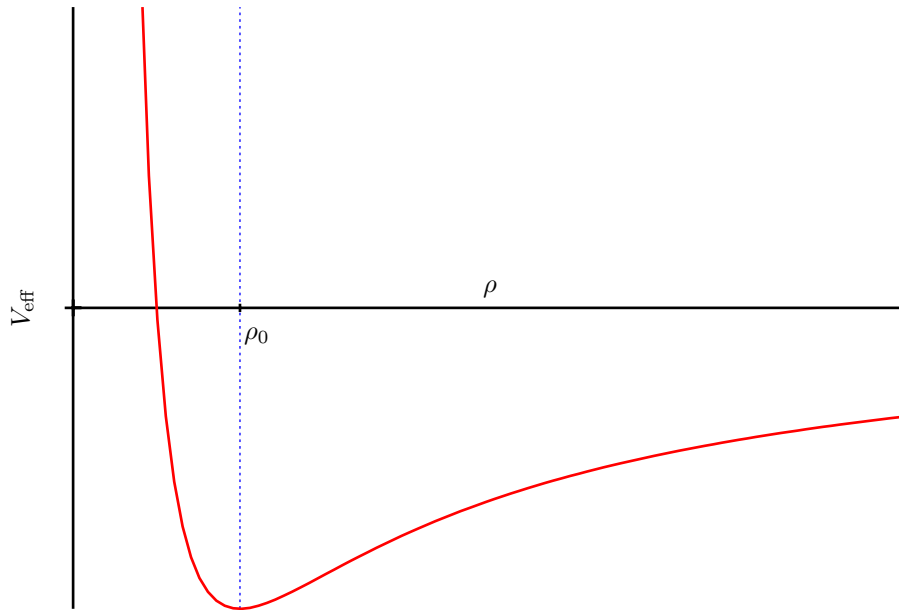


Abbildung 3.7: effektives Potential im Gravitationsfeld

$$\frac{k}{\rho_0^2} - \frac{2\beta}{\rho_0^3} = 0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{2\beta}{k}$$

mit dem Wert

$$V_0 = -\frac{k^2}{4\beta}$$

Physikalisch sinnvoll sind Lösungen mit $E > V_0$. Dann gibt es einen oder (für $E < 0$) zwei Umkehrpunkte

$$\rho_{\min} = -\frac{k}{2E} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4E\beta}{k^2}} \right) = \frac{\frac{2\beta}{k}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4E\beta}{k^2}}} = \frac{p}{1 + \epsilon}$$

$$\rho_{\max} = -\frac{k}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4E\beta}{k^2}} \right) = \frac{p}{1 - \epsilon}$$

mit den Abkürzungen

$$p = \frac{2\beta}{k}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{4E\beta}{k^2}}.$$

3 Zwei-Körper-Problem

Gesucht sind jetzt Lösungen der Form $\rho(\varphi)$. Dazu substituiert man zunächst $u := \frac{1}{\rho}$ und verwendet mit (3.4) den Winkel φ statt der Zeit als dynamische Variable.

$$\begin{aligned}\mu\rho^2 d\varphi = Ldt &\Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu} u^2 \frac{d}{d\varphi} \\ \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} &= -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\varphi}\end{aligned}$$

Die Energie (Hamiltonfunktion) (3.5) lautet dann

$$E\left(u, \frac{du}{d\varphi}\right) = \frac{L^2}{2\mu} \left\{ \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 \right\} - ku = \beta \left\{ \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 \right\} - ku = \text{const}$$

und aus $\frac{dE}{d\varphi} = 0$ erhält man mit der Produktregel und Kürzen von $\frac{du}{d\varphi}$ (falls das nicht verschwindet) eine Bewegungsgleichung für u .

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{2\beta}}$$

Diese Gleichung beschreibt einen harmonischen Oszillator, der mit konstanter Kraft ausgelenkt wird. Die Periode der Bewegung ist gerade $\Delta\varphi = 2\pi$ – eine Eigenschaft des $\frac{1}{\rho}$ -Potentials (tritt ebenfalls für $V(\rho) \sim \rho^2$ auf).

Wählt man als Anfangsbedingung $\rho(\varphi = 0) = \rho_{\min}$, so erhält man als Lösung

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{k}{2\beta} + A \cdot \cos \varphi = \frac{1}{p} (1 + \epsilon \cos \varphi).$$

Die Bahnkurven, die sich daraus ergeben, sind Kegelschnitte mit der *Exzentrizität* ϵ . Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

$V_0 < E < 0$: $\epsilon < 1$ Ellipsen (Kreise für $\epsilon = 0$)

$E = 0$: $\epsilon = 1$ Parabel

$E > 0$: $\epsilon > 1$ Hyperbel

Das sieht man der Lösung der Bewegungsgleichung nicht unbedingt direkt an, deshalb rechnen wir das für den interessantesten Fall – die Ellipsenform – einfach nach. Dabei formen wir im wesentlichen die Bewegungsgleichung um

$$\begin{aligned}p = \rho + \epsilon\rho \cos \varphi &= \sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon x \\ (1 - \epsilon^2)x^2 + 2\epsilon px + y^2 - p^2 &= 0 \\ (1 - \epsilon^2) \left(x + \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + y^2 &= \frac{p^2}{1 - \epsilon^2}\end{aligned}$$

3 Zwei-Körper-Problem

Das bringen wir die die Form der Ellipsengleichung

$$\left(\frac{x - x_c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

mit den Größen

$$\begin{aligned} \text{Zentrum: } x_c &= \frac{-\epsilon p}{1 - \epsilon^2} \\ \text{große Halbachse: } a &= \frac{p}{1 - \epsilon^2} \\ \text{kleine Halbachse: } b &= \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \end{aligned}$$

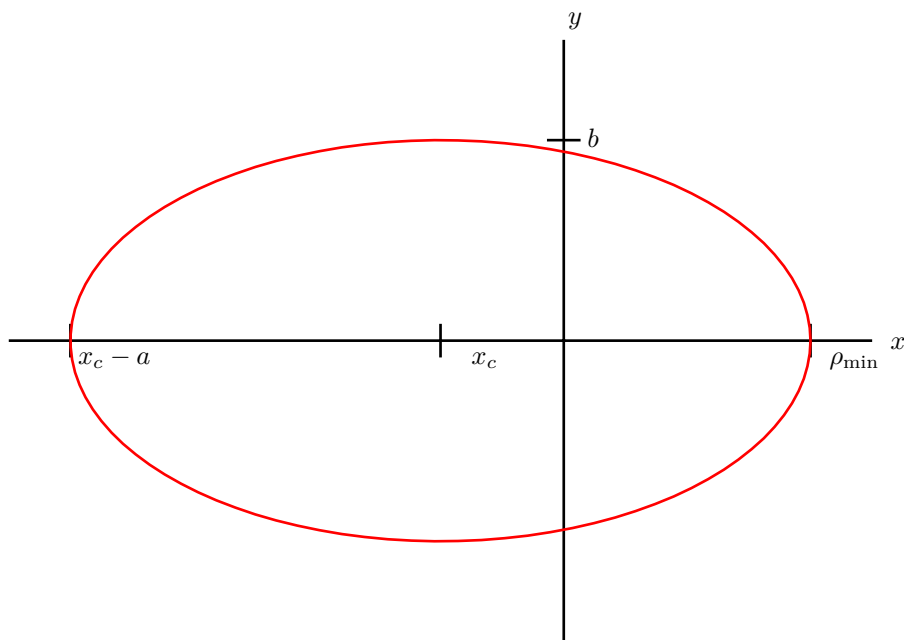


Abbildung 3.8: Bahnkurve eines Planeten im Gravitationsfeld einer Masse

Der sonnennächste Punkt bei ρ_{\min} heißt *Perihel*, der am weitesten entfernte *Aphel* (allgemein für Himmelskörper: *Periapsis* und *Apoapsis*).

Mit den nun gewonnenen Informationen können wir zum Abschluss dieses Kapitels die Keplerschen Gesetze nachvollziehen.

1. Keplersches Gesetz Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht (wegen Sonnenmasse \gg Planetenmasse).

3 Zwei-Körper-Problem

2. Keplersches Gesetz Die Flächengeschwindigkeit ist konstant (das haben wir bereits aus Gleichung (3.6) abgelesen. Wegen

$$\frac{dF}{dt} = \frac{L}{2\mu}$$

gilt für die Umlaufzeit τ

$$\tau = \frac{2\mu}{L} \underbrace{\pi(a \cdot b)}_{\text{Fläche der Ellipse}} = \frac{2\pi\mu}{L} \sqrt{pa^3} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} \sqrt{a^3}$$
$$\frac{k}{\mu} = G(m_1 + m_2) \approx Gm_1$$

Das brauchen wir für das

3. Keplersche Gesetz Das Quadrat der Periodendauer ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse ($\tau^2 \sim a^3$) mit einer Proportionalitätskonstanten, die für alle Planeten gleich ist. Das trifft in guter Näherung zu, für Jupiter beträgt die Abweichung 0,1%.

4 Der starre Körper

Während wir uns in den ersten beiden Kapiteln mit allgemeinen physikalischen Systemen und im dritten Kapitel mit dem Spezialfall von nur zwei Punktmassen beschäftigt haben, wollen wir uns nun einem weiteren wichtigen Konzept der klassischen Physik widmen. Wir betrachten ein System aus M Teilchen, die in ihrer Bewegung ganz enorm eingeschränkt sind. Der Name „Starrer Körper“ legt die Zwangsbedingungen bereits nahe: Die einzelnen Teilchen sollen untereinander feste Abstände besitzen und demnach lauten die Zwangsbedingungen

$$r_{i,j}^2 = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = c_{i,j}^2, \quad i, j = 1, \dots, M.$$

Natürlich können diese nicht alle unabhängig sein (M^2 Zwangsbedingungen, aber nur $3M$ Freiheitsgrade möglich). Man kann sich überlegen, dass bereits jeder Punkt eindeutig bestimmbar ist, wenn man die Orte von drei (nicht kollinearen) Punkten kennt. Damit ist die Zahl der Freiheitsgrade von $3M$ auf weniger als neun gesunken. Weil für die drei Punkte, die man ausgewählt hat, auch Zwangsbedingungen gelten ($r_{12} = c_{12}, r_{23} = c_{23}, r_{13} = c_{13}$) halten wir fest:

Der starre Körper hat $N = 6$ Freiheitsgrade.

4.1 Bezugssysteme

Im Folgenden bezeichne $K = \{x_1, x_2, x_3\}$ das raumfeste und $K' = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ das körperfeste Koordinatensystem. Das Ziel ist zunächst, sechs generalisierte Koordinaten auszuwählen, die das System sinnvoll beschreiben. Ein guter Ansatz ist, mit drei Koordinaten den Ursprung von K' in K („Translationsfreiheitsgrade“) und mit drei weiteren Koordinaten die Orientierung der Achsen in K' relativ zu denen in K („Rotationsfreiheitsgrade“) zu beschreiben.

Zunächst gilt, weil K und K' Koordinatensysteme sind, für jeden Vektor \vec{g}

$$\vec{g} = g_i \vec{e}_i = g'_i \vec{e}'_i,$$

wenn \vec{e}_i bzw. \vec{e}'_i die (normierten) Basisvektoren in K bzw. K' sind. Ebenso gilt natürlich

$$g_i = \vec{g} \cdot \vec{e}_i, \quad g'_i = \vec{g} \cdot \vec{e}'_i$$

Zur Bestimmung der Orientierung der beiden Koordinatensysteme zieht man die sogenannten *Richtungskosinusse* heran. Diese sind definiert durch

$$\alpha_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$$

Summenkonvention:
über doppelt
auftretende
Indizes wird in
sinnvollen
Bereichen (hier:
 $i = 1, 2, 3$)
summiert

4 Der starre Körper

und können die Beziehungen zwischen Vektoren aus beiden Koordinatensystemen vereinfachen.

$$\begin{aligned}\vec{e}'_i &= (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_j = \alpha_{ij} \vec{e}_j \\ \vec{e}_i &= (\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j) \cdot \vec{e}'_j = \alpha_{ji} \vec{e}'_j \\ g'_i &= \vec{e}'_i \cdot \vec{g} = \alpha_{ij} g_j \\ g_i &= \alpha_{ji} g'_j\end{aligned}$$

Weil die \vec{e}_i und \vec{e}'_i Orthonormalsysteme bilden sollen, können wir für die Richtungskosinusse Bedingungen aufstellen.

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \alpha_{ik} \cdot \alpha_{jk} \\ &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \alpha_{ki} \cdot \alpha_{kj}\end{aligned}$$

Natürlich stellen die α_{ij} eine lineare Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen $\{x_i\}, \{x'_i\}$ mit gleichem Ursprung dar und durch die genannte Bedingung ist diese Transformation *orthogonal*. Für die Matrixdarstellung gilt

$$\begin{aligned}A = (\alpha_{ij}) &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad AA^t = \mathbb{1} \\ \vec{x}' &= A\vec{x}, \quad \vec{x} = A^t\vec{x}' = A^{-1}\vec{x}'\end{aligned}$$

Aus der linearen Algebra weiß man, dass für orthogonale Matrizen nur ± 1 als Determinante möglich ist. Die Bewegung des starren Körpers wird nur durch Transformationen mit $\det A = +1$ beschrieben, da $\det A = -1$ eine Inversion (Drehspiegelung) ist. A gehört also zur *Drehgruppe* $SO(3)$.

Für die Geschwindigkeiten (also die zeitlichen Ableitungen der Koordinaten) gilt mit der Produktregel

$$\begin{aligned}\dot{g}_i &= \dot{\alpha}_{ji} g'_j + \alpha_{ji} \dot{g}'_j \\ \Rightarrow \dot{\vec{g}} &= \dot{g}_i \vec{e}_i = \dot{\alpha}_{ji} g'_j \vec{e}_i + \alpha_{ji} \dot{g}'_j \vec{e}_i \\ &= \dot{\alpha}_{ji} \alpha_{ki} g'_j \vec{e}'_k + \dot{g}'_j \vec{e}'_j \\ &= \beta_{jk} g'_j \vec{e}'_k + \dot{g}'_j \vec{e}'_j\end{aligned}$$

mit

$$\beta_{jk} = \dot{\alpha}_{ji} \alpha_{ki} = (\dot{A}A^t)_{jk}.$$

Aus $AA^t = \mathbb{1}$ ($\Leftrightarrow \alpha_{ji} \cdot \alpha_{ki} = \delta_{kj}$) folgt durch zeitliche Ableitung

$$\dot{\alpha}_{ji} \alpha_{ki} + \alpha_{ji} \dot{\alpha}_{ki} = 0 = \beta_{jk} + \beta_{kj}$$

Die Matrix $B = (\beta_{ij})$ ist also schiefsymmetrisch (insbesondere mit verschwindenden Diagonalelementen). Das heißt, dass sie sich durch nur drei unabhängige Parameter

4 Der starre Körper

beschreiben lässt.

$$\begin{aligned}\beta_{12} &=: \omega'_3 \\ \beta_{23} &=: \omega'_1 \\ \beta_{31} &=: \omega'_2\end{aligned}$$

Damit definieren wir

$$\vec{\omega} = \omega'_i \vec{e}'_i = \omega_i \vec{e}_i$$

und man kann nachrechnen (zumindest ich habe es nicht auf den ersten Blick erkannt), dass folgende Beziehung richtig ist.

$$\beta_{jk} g'_j \vec{e}'_k = (\beta_{1k} g'_1 + \beta_{2k} g'_2 + \beta_{3k} g'_3) \vec{e}'_k = \vec{\omega} \times \vec{g}$$

Dies kann man in die Formel für die Geschwindigkeit einsetzen und mit

$$\dot{\vec{g}} = \left(\frac{d}{dt} \vec{g} \right)_K, \quad \left(\frac{d}{dt} \vec{g} \right)_{K'} = \dot{g}'_j \vec{e}'_j$$

gilt

$$\boxed{\dot{\vec{g}} = \left(\frac{d}{dt} \vec{g} \right)_K = \left(\frac{d}{dt} \vec{g} \right)_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{g}}$$

Möchte man nicht, dass die Ursprünge von K und K' zusammenfallen, muss man eine zusätzliche Translation berücksichtigen.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{R} + A^t \vec{r}' \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'\end{aligned}\tag{4.1}$$

Nach Voraussetzung (*körperfestes* Koordinatensystem) ist $\dot{\vec{e}}'_i = 0$). Verschiebt man den gewählten Ursprung von K' um einen Vektor \vec{a} , so transformieren sich die Größen wie folgt

$$\begin{aligned}\vec{R} &\rightarrow \tilde{\vec{R}} = \vec{R} + A^t \vec{a} && \text{neuer Ursprung} \\ \dot{\vec{R}} &\rightarrow \dot{\tilde{\vec{R}}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{a} && \text{Geschwindigkeit des neuen Ursprungs} \\ \vec{\omega} &\rightarrow \tilde{\vec{\omega}} && \text{Winkelgeschwindigkeit relativ zu neuem Basispunkt} \\ \vec{r}' &\rightarrow \tilde{\vec{r}}' = \vec{r}' - \vec{a} && \text{Ortsvektor in neuem Bezugssystem } \tilde{K}'\end{aligned}$$

Weil (4.1) im raumfesten System galt, muss dieser Vektor für verschiedene Basispunkte in K' übereinstimmen.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ &\stackrel{!}{=} \dot{\tilde{\vec{R}}} + \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{r}}' = (\dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{a}) + \tilde{\vec{\omega}} \times (\vec{r}' - \vec{a}) \\ &= \dot{\vec{R}} + \tilde{\vec{\omega}} \times \vec{r}'\end{aligned}$$

4 Der starre Körper

$$\implies \vec{\omega} = \vec{\omega}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist also unabhängig von der Wahl des körperfesten Bezugssystems. Stehen zu einer festen Zeit t \vec{R} und $\vec{\omega}$ senkrecht aufeinander, so gilt das in jedem körperfesten Bezugssystem. Wegen (4.1) liegt auch $\dot{\vec{r}}$ in einer Ebene senkrecht zu $\vec{\omega}$.

Wählt man K' so, dass $\dot{\vec{R}} = 0$ gilt, so legt der Ursprung zu diesem Zeitpunkt die *momentane Drehachse* fest. Die Bewegung lässt sich vollständig aufteilen in die Rotation sowie die Translation in Richtung von $\vec{\omega}$.

4.1.1 Die Euler-Winkel

Die Richtungskosinusse α_{ij} waren wegen der Orthogonalitätsbedingung nicht unabhängig. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, sie durch drei generalisierte Koordinaten auszudrücken. Üblicherweise verwendet man drei Drehungen um definierte Achsen, um von K nach K' zu kommen.

In der Vorlesung benutzen wir folgenden Konvention:

- 1. Drehung** um den Winkel φ um die x_3 -Achse. Dabei drehen sich die x_1 - und x_2 -Achse in einer Ebene, die x_3 -Achse bleibt logischerweise erhalten.
- 2. Drehung** um den Winkel θ um die *neue* x_1 -Achse (die im vorigen Schritt aus der x_1 -Achse entstanden ist). Dabei drehen sich die x_3 - und die neue x_2 -Achse in der neuen x_2 - x_3 -Ebene. Die x_1 - x_2 -Ebene dreht sich entsprechend mit und ihr Schnitt mit der alten x_1 - x_2 -Ebene bildet eine sogenannte *Knotenlinie*.
- 3. Drehung** um den Winkel ψ um die *neue* x_3 -Achse. Es drehen sich also wie bei der ersten Drehung die x_1 - und x_2 -Achse in einer Ebene (diesmal in der gegenüber der ersten Drehung gekippten x_1 - x_2 -Ebene).

Für den Fall, dass man z.B. einen symmetrischen Kreisel beschreiben möchte, heißt das, dass φ die Drehung der Figurenachse (x'_3 -Achse) um die x_3 -Achse beschreibt. θ ist der Winkel zwischen diesen beiden Achsen und ψ gibt die Drehung um die Figurenachse an.

Durch Multiplikation dreier Drehmatrizen unter Berücksichtigung der richtigen Koordinatensysteme erhält man dann die Transformationsmatrix A , die aufzuschreiben ich mir erspare. Wichtig sind an dieser Stelle die Winkelgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega'_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega'_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}\end{aligned}\tag{4.2}$$

4.2 Trägheitstensor und Drehimpuls

Für den kräftefreien starren Körper (mit \bar{M} Massepunkten) können wir die Lagrange-Funktion direkt hinschreiben.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\bar{M}} m_k (\dot{\vec{r}}_k)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\bar{M}} m_k \left(\dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_k \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\bar{M}} m_k \dot{\vec{R}}^2 + \sum_{k=1}^{\bar{M}} m_k \left(\dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_k) \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\bar{M}} m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}'_k)^2 \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=: M \text{ Gesamtmasse}}\end{aligned}$$

Wählt man den Bezugspunkt im Schwerpunkt, gilt $\sum m_k \vec{r}'_k = 0$ und der mittlere Term verschwindet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\bar{M}} m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}'_k)^2$$

Lässt man nun die Euler-Lagrange-Gleichung für die Schwerpunktskomponenten darauf los, erhält man das, was man reingesteckt hat,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{R}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{R}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = -M \ddot{\vec{R}} = 0$$

die Kräftefreiheit. Wir betrachten nun den Anteil der kinetischen Energie, der aus der Rotation des starren Körpers stammt und verwenden die Lagrange-Identität der Vektorrechnung.

$$\begin{aligned}T_{\text{Rot}} &= \frac{1}{2} \sum_k m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}'_k) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k m_k (\vec{\omega}^2 r_k'^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_k)^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k m_k ((\omega'_i)^2 (x'_{kl})^2 - (\omega'_i x'_{ki})(\omega'_j x'_{kj}))\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet x'_{kl} die l -te Komponente des Ortsvektors des k -ten Teilchens im körperfesten Koordinatensystem und es wird per implizit über i, j, l summiert. Mit der Definition des *Trägheitstensors des starren Körpers*

$$\Theta_{ij} = \sum_k m_k ((x'_{kl})^2 \delta_{ij} - x'_{ki} x'_{kj})$$

4 Der starre Körper

vereinfacht sich die kinetische Energie zu

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \Theta_{ij} \omega'_i \omega'_j. \quad (4.3)$$

Der Trägheitstensor Θ (teilweise (Hand/Finch, Wikipedia) auch mit I bezeichnet) ist symmetrisch und additiv, d.h. der Trägheitstensor eines Körpers ist die Summe der Trägheitstensoren seiner Teile. Explizit ausgeschrieben lautet der Trägheitstensor

$$(\Theta_{ij}) = \sum_k m_k \begin{pmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -x_k y_k & x_k^2 + z_k^2 & -y_k z_k \\ -x_k z_k & -y_k z_k & x_k^2 + y_k^2 \end{pmatrix}$$

wobei ich die Koordinaten hier in einer intuitiveren und platzsparenderen Variante notiert habe.

Geht man von einer diskreten zu einer kontinuierlichen Massenverteilung mit Massendichte $\rho(\vec{r})$ über, lautet der Trägheitstensor

$$\Theta_{ij} = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') ((\vec{x}')^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j).$$

4.2.1 Hauptträgheitsmomente

Der Trägheitstensor ist ein Tensor zweiter Stufe, kann also durch eine Matrix dargestellt werden. Durch geeignete Wahl von K' kann man diese Matrix diagonalisieren, so dass gilt

$$\Theta_{ij} = \Theta_i \delta_{ij}$$

mit den *Hauptträgheitsmomenten* Θ_i . In diesem Bezugssystem wird der Ausdruck für die kinetische Energie noch einfacher.

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Theta_i (\omega'_i)^2 \quad (4.4)$$

Man teilt starre Körper nach ihren Hauptträgheitsmomenten in Kategorien ein, von denen uns insbesondere die zweite später noch intensiver beschäftigen wird.

- Θ_i paarweise verschieden: *dreiachsiger Kreisel*
- $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$: *symmetrischer Kreisel*
- $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$: *Kugelkreisel*

Die Hauptträgheitsmomente haben eine weitere interessante Eigenschaft. Aus der Definition rechnet man einfach nach, dass

$$\begin{aligned} \Theta_1 + \Theta_2 &= \sum_k m_k (2(\vec{r}'_k)^2 - (x'_{k1})^2 - (x'_{k2})^2) \\ &= \sum_k m_k ((x'_{k1})^2 + (x'_{k2})^2 + 2(x'_{k3})^2) \\ &\geq \sum_k m_k ((x'_{k1})^2 + (x'_{k2})^2) = \Theta_3 \end{aligned}$$

4 Der starre Körper

gilt (analog für andere Permutationen der Hauptträgheitsmomente). Das heißt, dass kein Hauptträgheitsmoment größer sein kann als die Summe der beiden anderen.

Satz von Steiner

Ist K' das Schwerpunktsystem und Θ_{ij} in diesem System der Trägheitstensor, so kann man den Trägheitstensor in einem um den Vektor \vec{a} verschobenen körperfesten Bezugssystem \tilde{K}' berechnen durch

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_{ij} &= \sum_k m_k ((\vec{r}'_k + \vec{a})^2 \delta_{ij} - (x'_{ki} + a_i)(x'_{kj} + a_j)) \\ &= \Theta_{ij} + M(\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) + 2\delta_{ij} \vec{a} \cdot \sum_k m_k \vec{r}'_k - a_i \sum_k m_k x'_{kj} - a_j \sum_k m_k x'_{ki} \\ &= \Theta_{ij} + M(\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j)\end{aligned}$$

wobei die letzten Terme weggefallen sind, weil K' das Schwerpunktsystem war.

4.2.2 Drehimpuls des starren Körpers

Der Drehimpuls \vec{L} hängt im Allgemeinen von der Wahl des Bezugspunktes ab. Wir wählen wieder das Schwerpunktsystem. Dann ergibt sich für den Drehimpuls

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_k m_k (\vec{r}_k \times \dot{\vec{r}}_k) = \sum_k m_k (\vec{R} + \vec{r}'_k) \times (\dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_k) \\ &= M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \sum_k m_k (\vec{r}'_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_k))\end{aligned}$$

(zwei Terme wegen Schwerpunktsystem weggefallen). Für den kräftefreien starren Körper gilt $\dot{\vec{R}} = \text{const}$, $\vec{R} = \vec{R}_0 + \dot{\vec{R}} \cdot t$. Deshalb ist der *Translationsdrehimpuls*

$$\vec{L}_{\text{trans}} = M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) = \text{const}$$

konstant (und verschwindet, wenn die Bewegung des Schwerpunktes durch den Ursprung von K geht). Im Folgenden wollen wir daher nur den interessanteren *Eigen-drehimpuls* betrachten.

$$\begin{aligned}\vec{L} &:= \vec{L}_{\text{rot}} = \sum_k m_k ((x'_{kl})^2 \vec{\omega} - \vec{r}'_k \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_k)) \\ &= \sum_k m_k ((x'_{kl})^2 \omega'_j - x'_{kj} \omega'_i x'_{ki}) \vec{e}'_j \\ &= \sum_k m_k ((x'_{kl})^2 \delta_{ij} - x'_{kj} x'_{ki}) \omega'_i \vec{e}'_j \\ &= \Theta_{ji} \omega'_i \vec{e}'_j = \Theta \cdot \omega\end{aligned}$$

Mit der kinetischen Energie aus (4.3) gilt also

$$L'_i = \frac{\partial T}{\partial \omega'_i}$$

4 Der starre Körper

(der Drehimpuls ist der Gradient der kinetischen Energie).

Anschaulich sind die Flächen im dreidimensionalen $\vec{\omega}$ -Raum, die

$$T = \frac{1}{2} \Theta_{ij} \omega'_i \omega'_j = \text{const}$$

erfüllen, Ellipsoide und \vec{L} steht senkrecht auf der Tangentialebene am Ellipsoid (Normalenvektor wegen Gradient). Da für den kräftefreien starren Körper \vec{L} konstant ist, dreht sich der Ellipsoid.

4.2.3 Beispiele

Rotator (alle Massepunkte auf einer Geraden)

Der Rotator besitzt nur fünf Freiheitsgrade (3 Translations-, 2 Rotationsfreiheitsgrade), weil alle Massepunkte auf einer Geraden liegen (Invarianz unter Rotation um diese Achse). Die Hauptträgheitsmomente sind

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \sum_k m_k (x'_{k3})^2, \quad \Theta_3 = 0$$

wenn die Massepunkte entlang der x'_3 -Achse aufgereiht sind.

4.3 Der kräftefreie starre Körper

Wenn im Folgenden nichts anderes erwähnt wird, betrachten wir den starren Körper stets im Hauptachsensystem K' , in dem $L'_i = \Theta_i \omega'_i$ gilt. Im raumfesten Koordinatensystem muss Drehimpulserhaltung gelten (Kräftefreiheit!).

$$0 = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_K = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

In Komponenten erhält man die *eulerschen (Kreisel-)Gleichungen*

$$\begin{cases} \Theta_1 \dot{\omega}'_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega'_2 \omega'_3 = 0 \\ \Theta_2 \dot{\omega}'_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega'_3 \omega'_1 = 0 \\ \Theta_3 \dot{\omega}'_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega'_1 \omega'_2 = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Diese Gleichungen findet man auch, wenn man die Euler-Lagrange-Gleichungen auf die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i \Theta_i (\omega'_i)^2$$

mit den Winkelgeschwindigkeiten ω'_i aus (4.2) und den Euler-Winkeln als generalisierten Koordinaten anwendet.

4 Der starre Körper

Betrachtet man die Drehimpulserhaltung

$$\vec{L}^2 = (L'_1)^2 + (L'_2)^2 + (L'_3)^2 =: C^2 = \text{const} \quad (4.6)$$

und die kinetische Energie aus (4.4) mit $L'_i = \Theta_i \omega'_i$

$$T_{\text{rot}} = \frac{(L'_1)^2}{2\Theta_1} + \frac{(L'_2)^2}{2\Theta_2} + \frac{(L'_3)^2}{2\Theta_3} = E = \text{const}, \quad (4.7)$$

so beschreibt die erste dieser Gleichungen eine Kugel mit Radius C , die zweite den sogenannten *Binet-Ellipsoid* mit Halbachsen $\sqrt{2E\Theta_i}$. \vec{L}' durchläuft gerade die Schnittkurve dieser beiden Körper. Sei $\Theta_1 \leq \Theta_2 \leq \Theta_3$. Dann muss $\sqrt{2E\Theta_3} \geq C \geq \sqrt{2E\Theta_1}$ gelten und man kann drei Fälle unterscheiden.

1. Fall: $C^2 \gtrsim 2E\Theta_1$

Die Schnittkurve ist nahe der kleinsten Halbachse des Ellipsoids

2. Fall: $C^2 \lesssim 2E\Theta_3$

Die Schnittkurve ist nahe der größten Halbachse des Ellipsoids

3. Fall: $C^2 \approx 2E\Theta_2$

Die Schnittkurven können sich berühren. Für den Fall, dass $C^2 = 2E\Theta_2$ gilt, gibt es eine „Torkelbewegung“ des Körpers, weil der Drehimpuls von einer Schnittkurve zur anderen „wechseln“ kann.

Deutlicher wird das in Abbildung 4.1.

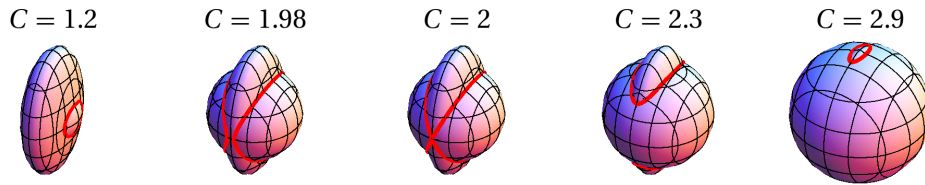


Abbildung 4.1: Schnitte der Kugel mit Radius C und dem Binet-Ellipsoids, hier mit Halbachsen der Längen 1, 2 und 3

4.3.1 analytische Beschreibung

Aus den Erhaltungsgrößen (4.6) und (4.7) kann man die Ausdrücke

$$\begin{aligned} 2E\Theta_3 - C^2 &= \frac{\Theta_3}{\Theta_1}(L'_1)^2 + \frac{\Theta_3}{\Theta_2}(L'_2)^2 + (L'_3)^2 - \sum_i (L'_i)^2 \\ &= \Theta_1(\Theta_3 - \Theta_1)(\omega'_1)^2 + \Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)(\omega'_2)^2 \end{aligned}$$

4 Der starre Körper

und analog

$$2E\Theta_1 - C^2 = \Theta_2(\Theta_1 - \Theta_2)(\omega'_2)^2 + \Theta_3(\Theta_1 - \Theta_3)(\omega'_3)^2$$

gewinnen. Damit kann man die Zweite der eulerschen Gleichungen (4.5) umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{d\omega'_2}{dt} = \dot{\omega}'_2 &= \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2} \omega'_1 \omega'_3 \\ &= \frac{1}{\Theta_2 \sqrt{\Theta_1 \Theta_3}} \left\{ (2E\Theta_3 - C^2 - \Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)(\omega'_2)^2) \right. \\ &\quad \left. (C^2 - 2E\Theta_1 - \Theta_2(\Theta_2 - \Theta_1)(\omega'_2)^2) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daraus kann man per Trennung der Variablen $t(\omega'_2)$ als elliptisches Integral erhalten. Wir führen zur Abkürzung drei Bezeichnungen ein.

$$\begin{aligned} \tau &= t \sqrt{\frac{(\Theta_3 - \Theta_2)(C^2 - 2E\Theta_1)}{\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3}} \\ s &= \omega'_2 \sqrt{\frac{\Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)}{2E\Theta_3 - C^2}} \\ k^2 &= \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3 - \Theta_2} \cdot \frac{2E\Theta_3 - C^2}{C^2 - 2E\Theta_1} < 1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Man kann nachrechnen (bis auf die Integrationsgrenze klappt das bei mir auch), dass man bei der Trennung der Variablen dann folgende Lösung erhält.

$$\tau(s) = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

Das ist ein elliptisches Integral erster Art – die Umkehrfunktion $s(\tau)$ heißt *jacobische elliptische Funktion* $\text{sn}(\tau)$. Außerdem gibt es weitere elliptische Funktionen, für die folgende Beziehungen gelten.

$$\text{cn}(\tau) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(\tau)}, \quad \text{dn}(\tau) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(\tau)}$$

Aus (4.8) und den Gleichungen am Beginn dieses Abschnitts folgen dann die Lösungen für ω'_i .

$$\begin{aligned} \omega'_2 &= \sqrt{\frac{2E\Theta_3 - C^2}{\Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)}} \cdot \text{sn}(\tau) \\ \omega'_1 &= \sqrt{\frac{2E\Theta_3 - C^2}{\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_1)}} \cdot \text{cn}(\tau) \\ \omega'_3 &= \sqrt{\frac{C^2 - 2E\Theta_1}{\Theta_3(\Theta_3 - \Theta_1)}} \cdot \text{dn}(\tau) \end{aligned}$$

4 Der starre Körper

Die elliptischen Funktionen sn , cn , dn sind $4K$ -periodisch in τ mit

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Daraus ergibt sich, dass die Schnittkurve aus Abbildung 4.1 mit Periode

$$T_{\text{per}} = 4K \sqrt{\frac{\Theta_1\Theta_2\Theta_3}{(\Theta_3 - \Theta_2)(C^2 - 2E\Theta_1)}}$$

durchlaufen wird.

Spezialfall: symmetrischer Kreisel

Wir nehmen an, dass $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$ gilt. Dann ist $k^2 = 0$ und das elliptische Integral wird zu einem Einfachen. Man findet

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \arcsin s \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{sn}(\tau) \rightarrow \sin(\tau) \\ \text{cn}(\tau) \rightarrow \cos(\tau) \\ \text{dn}(\tau) \rightarrow 1 \end{cases} \end{aligned}$$

und die Lösungen für die Winkelfunktionen lauten jetzt

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= a \cos\left(\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1} \omega'_3 t\right) \\ \omega'_2 &= a \sin\left(\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1} \omega'_3 t\right) \quad , \quad a = \sqrt{\frac{2E\Theta_3 - C^2}{\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_1)}} \\ \omega'_3 &= \sqrt{\frac{C^2 - 2E\Theta_1}{\Theta_3(\Theta_3 - \Theta_1)}} = \text{const} \end{aligned}$$

Daran lassen sich zwei Dinge ablesen: Die Projektion von $\vec{\omega}$ auf die Ebene, deren Normale die Figurenachs (x'_3 -Achse) ist, rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1} \omega'_3$. Außerdem ist $|\vec{\omega}|$ konstant – der Vektor „präzediert“ um die Figurenachs.

4.3.2 Bewegung im raumfesten System

Für die Analyse der Bewegung des starren Körpers im raumfesten System müssen wir zunächst Koordinaten wählen. Dabei kann man beliebige (feste) Achsen wählen, es gibt jedoch geschicktere und weniger geschickte Möglichkeiten. Sinnvoll ist es meist, sich eine Symmetrie oder (vektorielle) Erhaltungsgröße zu suchen und das Koordinatensystem daran auszurichten. Hier wählen wir die x_3 -Achse parallel zum Drehimpuls \vec{L} , der erhalten ist.

4 Der starre Körper

Dann kann man mit der Definition der Euler-Winkel sowie $|\vec{L}| = C$ den Drehimpuls im körperfesten System ausrechnen.

$$\begin{aligned}\vec{L}' &= A \cdot \vec{L} \\ &= C \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega'_1 \\ \Theta_2 \omega'_2 \\ \Theta_3 \omega'_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Darüber erhält man Gleichungen für θ und ψ

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\Theta_3 \omega'_3}{C} = \sqrt{\frac{\Theta_3(C^2 - 2e\Theta_1)}{C^2(\Theta_3 - \Theta_1)}} \operatorname{dn}(\tau) \\ \tan \psi &= \frac{\Theta_1 \omega'_1}{\Theta_2 \omega'_2} = \sqrt{\frac{\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_2)}{\Theta_2(\Theta_3 - \Theta_1)}} \frac{\operatorname{cn}(\tau)}{\operatorname{sn}(\tau)}\end{aligned}$$

Eine Lösung für φ findet man mithilfe von (4.2)

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega'_1 \sin \psi + \omega'_2 \cos \psi}{\sin \theta} = C \frac{\Theta_1(\omega'_1)^2 + \Theta_2(\omega'_2)^2}{\Theta_1^2(\omega'_1)^2 + \Theta_2^2(\omega'_2)^2}$$

und Integration über die Zeit.

Spezialfall: symmetrischer Kreisel

Wie oben gelte wieder $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$. Dann ist

$$\cos \theta = \frac{\Theta_3 \omega'_3}{C} = \sqrt{\frac{\Theta_3(C^2 - 2e\Theta_1)}{C^2(\Theta_3 - \Theta_1)}} = \text{const}$$

konstant, was bedeutet, dass der Winkel zwischen Drehimpulsachse (x_3) und Figurenachse (x'_3) konstant ist. Weiter ist $\tan \psi = \cot \tau$, also $\psi = \frac{\pi}{2} - \tau$.

$$\Rightarrow \dot{\psi} = -\sqrt{\frac{(\Theta_3 - \Theta_1)(C^2 - 2E\Theta_1)}{\Theta_1^2\Theta_3}} = \text{const}$$

Die Gleichung für φ fällt nahezu in sich zusammen.

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{\Theta_1} = \text{const}$$

Dass hier so viel konstant ist und die Bewegung daher ziemlich langweilig ist, war vorherzusehen. Immerhin betrachten wir den starren Körper noch ohne äußere Kräfte, was sich im nächsten Abschnitt ändert.

4.4 Der schwere symmetrische Kreisel

Aus Zeitgründen lasse ich dieses Kapitel vorerst weg. Gerade Dinge wie der Stehaufkreisel sind jedoch ohnehin so trivial, dass sie der Erwähnung kaum wert sind.

4.5 Bewegung in beschleunigten Bezugssystemen

Die Newtonsche Mechanik war grundlegend auf Inertialsysteme beschränkt (sonst gilt das Postulat „kräftefreie Körper bewegen sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit“ nicht). Das dem gegenüberzustellende Wirkungsprinzip hat keine Einschränkung hinsichtlich der Wahl des Bezugssystems. Wir haben sogar festgestellt, dass in Bezug auf die Bewegungsgleichungen alle Koordinatensysteme gleichwertig sind. Das wollen wir einmal für ein freies Teilchen näher betrachten (könnte ja sein, dass wir Mist gebaut haben).

Im Inertialsystem K_0 ist

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}m\vec{v}_0 - V(\vec{r}_0)$$

die Lagrange-Funktion eines freien Teilchens im Potential V .

1. Das Bezugssystem K' bewegt sich mit zeitabhängiger Geschwindigkeit $\vec{V}(t)$ relativ zu K_0 . Dann ist

$$\vec{v}_0 = \vec{V}(t) + \vec{v}'$$

und die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\vec{v}')^2 + m\vec{v}' \cdot \vec{V}(t) + \frac{m}{2}(\vec{V}(t))^2 - V.$$

Wir wissen bereits aus dem zweiten Kapitel, dass die Addition einer totalen Zeitableitung die Bewegungsgleichungen nicht ändert. Deshalb können wir den Term proportional zu $\vec{V}^2(t)$ ignorieren. Wegen

$$m\vec{v}' \cdot \vec{V}(t) = m\vec{V}(t) \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{V} \cdot \vec{r}') - m\vec{r}' \cdot \underbrace{\frac{d\vec{V}}{dt}}_{=: \vec{A}(t)}$$

können wir den Lagrangian weiter vereinfachen zu

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2}(\vec{v}')^2 - m\vec{A}(t) \cdot \vec{r}' - V$$

und aus der Euler-Lagrange-Gleichung erhält man die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}' = -\nabla V - m\vec{A}(t).$$

In Worten: Die (mit der Masse gewichtete) Gesamtbeschleunigung ist gleich dem negativen Gradienten des Potentials (für $V = 0$ erhält man gerade, dass das Teilchen in K' genau entgegengesetzt zum Koordinatensystem beschleunigt).

4 Der starre Körper

2. Das Bezugssystem K' rotiert zusätzlich gegenüber K_0 mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}(t)$. Dann gilt für die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = \vec{V}(t) + \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'$$

und der *allgemeine Lagrangian für Teilchen in beschleunigten Bezugssystemen* lautet

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\vec{v}')^2 + m\vec{v}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + \frac{1}{2}m(\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 - m\vec{A}(t) \cdot \vec{r}' - V.$$

Aus den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \vec{v}'} &= m\vec{v}' + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \vec{r}'} &= m(\vec{v}' \times \vec{\Omega}) + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}') \times \vec{\Omega} - m\vec{A} - \nabla V \end{aligned}$$

erhält man die ultimative Bewegungsgleichung

$$\boxed{m\dot{\vec{v}}' = -\nabla V - m\vec{A} + m(\vec{r}' \times \dot{\vec{\Omega}}) + 2m(\vec{v}' \times \vec{\Omega}) + m\vec{\Omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\Omega})}$$

mit der *Corioliskraft* $2m(\vec{v}' \times \vec{\Omega})$ und der *Zentrifugalkraft* $m\vec{\Omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\Omega})$.

5 Hamiltonsche Dynamik

Der Lagrange-Formalismus ist zwar eine schöne Sache, hat jedoch auch ein paar Schönheitsfehler. Der Lagrangian ist eine Funktion der Orte und Geschwindigkeiten – diese sind jedoch nicht vollständig unabhängig (schließlich ist das eine die zeitliche Ableitung des anderen). Wir werden diesen Makel beheben und in diesem Zuge gleich eine neue Klasse von Transformationen mathematisch beleuchten. Als Nebeneffekt werden die neuen Bewegungsgleichungen tendenziell einfacher zu lösen sein.

5.1 Legendre-Transformation, Hamiltonsche Gleichungen

Ziel dieses Abschnitts ist es, von einer Beschreibung der Bewegung im Konfigurationsraum $\{q_k, \dot{q}_k\}$ zu einer Beschreibung im Phasenraum $\{q_k, p_k\}$ zu gelangen. Allgemeiner wollen wir ausgehend von einer Funktion einer Variablen eine neue Funktion einer anderen Variablen erhalten, ohne dabei Informationen zu verlieren.

Sei $A(x, y)$ eine streng konvexe (oder konkave) Funktion (d.h. die zweiten Ableitungen verschwinden nirgends). Dann definieren wir die *Legendre-Transformierte von A*

$$B(x, y, z) := yz - A(x, y) \quad (5.1)$$

mit einer neuen (erstmal unabhängigen) Variablen z . Das (totale) Differential von B lautet

$$\begin{aligned} dB &= zdy + ydz - \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_y dx - \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_x dy \\ &= \left(z - \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_x \right) dy + ydz - \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_y dx \end{aligned}$$

Sei $z = z(x, y) := \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_x$. Dann verschwindet der erste Term im Differential von B , d.h. B ist unabhängig von y . Deshalb können wir aus dem Differential folgende Beziehungen ablesen.

$$\left. \frac{\partial B}{\partial z} \right|_x = y = y(x, z), \quad \left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_z = - \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_y. \quad (5.2)$$

Explizit ist also $B = B(x, y(x, z), z)$ und die Transformation lässt sich umkehren, wenn man $y(x, z)$ nach $z(x, y)$ auflöst und das in die Definition (5.1) einsetzt. Man kann das Verfahren der Legendre-Transformation auch grafisch sehr anschaulich zeigen. Wenn ich Zeit dafür finde, fertige ich noch ein Bild an...

5 Hamiltonsche Dynamik

Wie bereits in Kapitel 1.3 erwähnt, ist die Hamiltonfunktion gerade die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion. Denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(q, \dot{q}) \\ H(p, q) &= p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}), \quad p = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_q \end{aligned}$$

Da wir jetzt das Hamiltonsche Prinzip benutzen wollen, betrachten wir zunächst im Sinne von Differentialen die Variation des Lagrangian.

$$\delta \mathcal{L} = \dot{q} \delta p + p \delta \dot{q} - \delta H = \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q + \frac{d}{dt}(p \delta q)$$

Die Variation der Wirkung δS soll für unabhängige Variation von p und q verschwinden, deshalb müssen die Koeffizienten von δp und δq einzeln verschwinden. Der Term $\frac{d}{dt}(p \delta q)$ trägt nicht bei, da die Variation am Rand Null sein soll. Man erhält dieselbe Aussage, wenn man das Differential von H betrachtet.

$$dH = \dot{q} dp + p d\dot{q} - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right|_{\dot{q}} dq - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_q d\dot{q}$$

Dort verschwindet nach Definition von p der Koeffizient von $d\dot{q}$. Zusammen mit der Euler-Lagrange-Gleichung erhält man für die anderen beiden Koeffizienten

$$\dot{q} = \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_q, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial q} \right|_p = - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right|_{\dot{q}} = - \frac{d}{dt} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_q = -\dot{p}$$

oder (um es wieder auf die Differentiale zu übertragen)

$$\boxed{dH = \dot{q} dp - \dot{p} dq}$$

Das ganze Prozedere funktioniert natürlich auch bei mehr Freiheitsgraden oder wenn die Lagrange-Funktion eine explizite Zeitabhängigkeit aufweist. Dann ist der Hamiltonian

$$\begin{aligned} H &= p_k \dot{q}_k - \mathcal{L} = H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t) \\ dH &= \dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned}$$

mit $\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ nach (5.2) (die Zeit ist eine passive Variable wie die Koordinaten). Aus dem Differential lesen wir das ab, was wir im ersten Kapitel bereits bewiesen haben

$$\frac{dH}{dt} = \dot{q}_k \dot{p}_k - \dot{p}_k \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Außerdem können wir jetzt für N Freiheitsgrade $2N$ Bewegungsgleichungen 1. Ordnung aufstellen.

$$\begin{array}{l} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad k = 1, \dots, N \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad k = 1, \dots, N \\ \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{array}$$

Vorher (im Lagrange-Formalismus) hatten wir N Bewegungsgleichungen 2. Ordnung.

5.1.1 Beispiele

folgen

5.2 Kanonische Transformationen

Nehmen wir an, wir hätten eine Hamilton-Funktion $H(q, p)$ gegeben, in der alle Koordinaten q_k zyklisch sind. Dann folgt aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (wie beim Lagrange-Formalismus)

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k =: \alpha_k = \text{const}$$

und weiterhin ist

$$\dot{q}_k = \left. \frac{\partial H}{\partial p_k} \right|_{\alpha_k} =: \omega_k(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \text{const}$$

und deshalb ist die Lösung der Bewegungsgleichungen

$$q_k = \omega_k \cdot t + \beta_k$$

mit Konstanten, die sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Das ist also offenbar eine sehr simple Darstellung des Problems. Stellt sich die Frage: Kann man jedes Problem so umformulieren, dass die Lösung so einfach wird und wenn ja wie?

5.2.1 Punkttransformationen im Phasenraum

Im Lagrange-Formalismus haben wir Punkttransformationen $Q_k = Q_k(q_1, \dots, q_N)$ der Koordinaten betrachtet und festgestellt, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen unverändert im neuen System gelten.

Im Phasenraum liegen Koordinaten und Impulse grundsätzlich unabhängig voneinander vor, man kann also eine Transformation $\{q_k, p_k\} \rightarrow \{Q_k, P_k\}$ (Koordinaten und Impulse gleichzeitig transformiert) durchführen. Solche *Punkttransformationen im*

5 Hamiltonsche Dynamik

Phasenraum sind dann analog zu den „normalen“ Punkttransformationen invertierbare Funktionen

$$Q_k = Q_k(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t), \quad P_k = P_k(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t). \quad (5.3)$$

Damit wir die Dynamik des Systems aber weiterhin beschreiben können, muss der physikalische Pfad die neuen Beziehungen

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial K}{\partial P_k}$$

mit der „neuen“ Hamiltonfunktion K erfüllen. Wenn man zum Variationsprinzip zurückgeht, heißt das, dass

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt (P_k \dot{Q}_k - K(Q, P, t)) = 0 \Leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (p_k \dot{q}_k - H(q, p, t)) = 0$$

gelten muss. Das gilt auf jeden Fall dann, wenn für K gilt

$$\lambda(p_k \dot{q}_k - H) = P_k \dot{Q}_k - K + \frac{dF}{dt} \quad (5.4)$$

wobei F wieder eine beliebige (zweimal stetig differenzierbare) Funktion der Phasenraumkoordinaten p, q, P, Q und λ eine Konstante zur Skalentransformation (im Folgenden in der Regel $\lambda = 1$) ist. Die zeitliche Ableitung von F spielt wie schon im Lagrange-Formalismus keine Rolle, da sie nur am Rand des Integrationsintervalls beiträgt, dort soll die Variation aber verschwinden.

Transformationen im Phasenraum, die (5.4) erfüllen, heißen *kanonische Transformationen*.

5.2.2 erzeugende Funktion

Durch die Punkttransformation (5.3) gibt es $2N$ Beziehungen zwischen den $4N$ Koordinaten $\{q_k, p_k, Q_k, P_k\}$. Man kann also die Hälfte der Parameter von F eliminieren. Wir betrachten als Beispiel die Funktion $F = F_1(q_k, Q_k, t)$, die nur von neuen und alten Koordinaten abhängt. Dann gilt

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

und eingesetzt in (5.4) erhält man die Gleichung

$$p_k \dot{q}_k - H = P_k \dot{Q}_k - K + \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Da die $2N$ Koordinaten q_k, Q_k unabhängig sind, müssen die Koeffizienten von \dot{q}_k, \dot{Q}_k einzeln verschwinden und was man findet, ist einerseits die Punkt-Transformation im Phasenraum

$$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} = p_k(q, Q, t), \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} = P_k(q, Q, t) \quad (5.5)$$

5 Hamiltonsche Dynamik

und andererseits eine Gleichung zur Bestimmung von K

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Die Invertierung der Punkt-Transformation liefert dann

$$Q_k(q, p, t), \quad P_k(q, p, t), \quad K(Q, P, t).$$

Jetzt ist auch der Begriff „erzeugende Funktion“ klar: Die Transformation ergibt sich aus den partiellen Ableitungen von F ! Möchte man eine vorliegende Transformation kanonisch machen (bzw. die zugehörige Hamilton-Funktion finden), so muss man zunächst eine Funktion finden, die diese Transformation erzeugt.

Es gibt im Wesentlichen vier mögliche Kombinationen der Parameter der erzeugenden Funktion (abgesehen von gemischten Parametern). Diese sind in Tabelle 5.1 jeweils mit einem trivialen Beispiel aufgeführt.

Tabelle 5.1: Übersicht von erzeugenden Funktionen kanonischer Transformationen

Erzeugende	kanonische Transformation	triviales Beispiel
$F_1(q, Q, t)$	$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$	$F_1 = q \cdot Q \quad Q = p, \quad P = -q$
$F_2(q, P, t)$	$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$	$F_2 = q \cdot P \quad Q = q, \quad P = p$
$F_3(p, Q, t)$	$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$	$F_3 = p \cdot Q \quad Q = -q, \quad P = -p$
$F_4(p, P, t)$	$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}$	$F_4 = p \cdot P \quad Q = p, \quad P = -q$

Identität!

Es gibt zu einer kanonischen Transformation in der Regel alle vier erzeugenden Funktionen und sie gehen durch Legendre-Transformationen auseinander hervor. Wichtig ist in diesem Zusammenhang die (oft unterschlagene) Konvexitätsbedingung für die Legendre-Transformation. Die trivialen Beispiele in der Tabelle können deshalb nicht transformiert werden! Dass das im Allgemeinen aber geht, kann man an einem Beispiel konkret nachrechnen.

F_3 ist die Legendre-Transformierte von F_1 , wobei gilt

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - q \cdot p, \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$$

außerdem ist F_1 nicht explizit von p abhängig, deshalb findet man

$$\frac{\partial F_3}{\partial p} = -q$$

und aus (5.5) folgt

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$$

(das sind genau die in der Tabelle genannten Transformationen). Dass F_1 und F_3 dieselbe kanonische Transformation erzeugen, kann man am Beispiel des harmonischen Oszillators überprüfen. Dort lautet die (sinnvolle) Transformation F_1 (vgl. Beispiele)

$$F_1(q, Q) = \frac{\omega q^2}{2} \cot 2\pi Q, \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \omega q \cot 2\pi Q.$$

Daraus erhält man mit der Legendre-Transformation

$$\begin{aligned} F_3(p, Q) &= F_1 - q \cdot p \\ &= -\frac{p^2}{2\omega} \tan 2\pi Q \end{aligned}$$

und die Gleichungen der kanonischen Transformation angewandt ergeben

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\partial F_3}{\partial p} = \frac{p}{\omega} \tan 2\pi Q \quad (\text{passt, s.o.}) \\ P &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = \pi\omega \frac{q^2}{\sin^2 2\pi Q} = \pi \frac{p^2}{\omega} \frac{1}{\cos^2 2\pi Q} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \end{aligned}$$

Also erzeugen F_1 und F_3 wirklich dieselbe kanonische Transformation.

Analog kommt man durch die Legendre-Transformationen

$$\begin{aligned} F_4(p, P, t) &= F_3(p, Q, t) + P \cdot Q, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \\ F_2(q, P, t) &= F_1(q, Q, t) + P \cdot Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \end{aligned}$$

von einer erzeugenden Funktion zu einer anderen.

Punkt-Transformationen lassen die Euler-Lagrange-Gleichungen unverändert, sind also in diesem Sinne trivialerweise kanonische Transformationen. Die erzeugende Funktion lautet

$$F_2(q, P, t) = f(q, t) \cdot P$$

und man erhält die Transformation

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P} = f(q, t) \\ p &= \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot P \end{aligned}$$

5.2.3 Beispiel: infinitesimale Transformation durch Hamiltonfunktion

In Tabelle 5.1 sieht man, dass die Transformation, die von $F_2 = q \cdot P$ erzeugt wird, die Identität ist. Wir betrachten eine Abweichung von dieser Transformation, indem wir

einen kleinen Term hinzuaddieren.

$$F_2(q, P) = q \cdot P + \epsilon G(q, P)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q} \\ \rightarrow P = p - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P} \end{cases}$$

Wobei hier G zunächst beliebig ist. Wählt man jetzt aber die Hamiltonfunktion $G(q, P) = H(q, P) \approx H(q, p)$ und eine kleine Zeiteinheit $\epsilon = dt \rightarrow 0$, so erhält man die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

$$\frac{P - p}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{Q - q}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Insofern generiert die Hamiltonfunktion eine Reihe infinitesimaler kanonischer Transformationen

$$(q, p)_t \rightarrow (q, p)_{t+dt}.$$

5.2.4 Beispiel: harmonischer Oszillator

folgt

5.2.5 Beispiel: Skalentransformation

folgt

5.3 Symplektische Struktur

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

sind zwar fast, aber leider nicht vollständig symmetrisch. Um diesem formalen Makel beizukommen, aber auch ein Werkzeug für die kommenden Kapitel zu schaffen, führt man die sogenannte *symplektische Struktur* ein. Dazu definiert man

$$\eta_k = \begin{cases} q_k & k = 1, \dots, N \\ p_{N-k} & k = N + 1, \dots, 2N \end{cases}$$

5 Hamiltonsche Dynamik

und damit

$$(\nabla_{\eta} H)_k = \frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_k} & k = 1, \dots, N \\ \frac{\partial H}{\partial p_{N-k}} & k = N+1, \dots, 2N \end{cases}$$

Weiterhin definiert man die Matrix

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1}_N \\ \hline -\mathbb{1}_N & 0 \end{array} \right) \in \{-1, 0, 1\}^{2N}$$

mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} J^t &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathbb{1}_N \\ \hline \mathbb{1}_N & 0 \end{array} \right) = -J \\ J \cdot J^t &= J^t \cdot J = \mathbb{1}_{2N} \\ \Rightarrow J^t &= -J = J^{-1} \\ J^2 &= J \cdot J = -\mathbb{1}_{2N} \\ \det J &= +1 \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen ist die Formulierung der Hamilton-Gleichungen einfacher geworden

$$\dot{\eta} = J \cdot \nabla_{\eta} H \quad \left(\text{in Komponenten: } \dot{\eta}_k = J_{kl} \frac{\partial H}{\partial \eta_l} \right) \quad (5.6)$$

Betrachtet man nun eine nicht explizit zeitabhängige kanonische Transformation $Q_k(q, p), P_k(q, p)$, so ändert sich auch der Vektor aus Orten und Impulsen

$$\xi_k = \xi_k(\eta), \quad k = 1, \dots, 2N$$

(diese Gleichung enthält die komplette Transformation!). Für die zeitliche Ableitung gilt (weil die Transformation nicht explizit zeitabhängig sein soll)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \frac{\partial \xi_k}{\partial \eta_l} \dot{\eta}_l \\ &= M_{kl} \dot{\eta}_l \end{aligned}$$

mit der *Jacobi-Matrix* M der kanonischen Transformation. Unter Verwendung der Bewegungsgleichung (5.6) erhält man

$$\dot{\xi} = M \cdot J \cdot \nabla_{\eta} H$$

Kehrt man die kanonische Transformation um, folgt

$$\begin{aligned} H(\eta) &= H(\eta(\xi)) = H(\xi) \\ \frac{\partial H}{\partial \eta_k} &= \frac{\partial H}{\partial \xi_l} \cdot \frac{\partial \xi_l}{\partial \eta_k} \implies \nabla_{\eta} H = M^t \cdot \nabla_{\xi} H \end{aligned} \quad (5.7)$$

also insgesamt

$$\dot{\xi} = M \cdot J \cdot M^t \cdot \nabla_{\xi} H$$

Es gilt jedoch weiterhin, dass die transformierte Hamiltonfunktion $K(\xi)$ gleich der ursprünglichen Hamiltonfunktion $H(\eta(\xi))$ ist, weil die Transformation zeitunabhängig ist. In den transformierten Variablen lautet die Bewegungsgleichung daher

$$\dot{\xi} = J \cdot \nabla_{\xi} K = J \cdot \nabla_{\xi} H.$$

Ein Vergleich liefert jetzt die Aussage, dass eine Transformation genau dann kanonisch ist (also die Bewegungsgleichungen erhält), wenn die Jacobi-Matrix M die Bedingung

$$M \cdot J \cdot M^t = J \tag{5.8}$$

erfüllt. Eine solche Matrix heißt *symplektisch*.

5.4 Poisson-Klammern und kanonische Invarianten

Für zwei Funktionen $A(q, p, t), B(q, p, t)$ auf dem Phasenraum ist durch

$$\{A, B\}_{q,p} := \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k}$$

die *Poisson-Klammer* definiert. Offenbar kann man mithilfe der symplektischen Struktur die Summe in ein Matrixprodukt umwandeln.

$$\{A, B\}_{\eta} = (\nabla_{\eta} A)^t \cdot J \cdot (\nabla_{\eta} B)$$

5.4.1 Eigenschaften der Poisson-Klammern

Sind ξ neue Koordinaten und Impulse, die durch eine kanonische Transformation mit Jacobi-Matrix M aus η hervorgegangen sind, so gilt wegen (5.7) und (5.8)

$$\begin{aligned} \{A, B\}_{\eta} &= (\nabla_{\eta} A)^t \cdot J \cdot (\nabla_{\eta} B) \\ &= (\nabla_{\xi} A)^t \cdot M \cdot J \cdot M^t \cdot (\nabla_{\xi} B) = \{A, B\}_{\xi} \end{aligned}$$

Poisson-Klammern sind also unter kanonischen Transformationen invariant! Deshalb ist der Index an den Klammern überflüssig und wird in Zukunft weggelassen.

Sind A und B selbst Koordinaten oder Impulse, so überzeugt man sich leicht, dass die folgenden Beziehungen richtig sind.

$$\begin{aligned} \{q_k, q_l\} &= 0 = \{p_k, p_l\} \\ \{q_k, p_l\} &= \delta_{kl} = -\{p_k, q_l\} \\ \{\eta, \eta\} &= J \quad (\text{als Matrixgleichung}) \end{aligned}$$

Außerdem kann man für eine beliebige Funktion $f(q, p, t)$ die totale Zeitableitung durch

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

ausdrücken, wobei die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ausgenutzt wurden.

Zuletzt sollen noch einige allgemeine Eigenschaften der Poisson-Klammern aufgeführt werden (die ersten sind klar, die letzten lassen sich durch Nachrechnen beweisen).

$$\begin{array}{ll} \text{Antisymmetrie} & \{A, B\} = -\{B, A\}, \quad \{A, A\} = 0 \\ \text{Linearität} & \{A_1 + A_2, B\} = \{A_1, B\} + \{A_2, B\} \\ & \{\alpha A, B\} = \alpha \{A, B\} \quad \text{für } \alpha = \text{const} \\ \text{Produktregel} & \{A_1 \cdot A_2, B\} = A_1 \{A_2, B\} + A_2 \{A_1, B\} \\ \text{Jacobi-Identität} & \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \end{array}$$

5.4.2 Invarianz des Phasenvolumens

Unter einer kanonischen Transformation geht das *Volumenelement des Phasenraums*

$$d^{2N}\eta = dq_1 \cdots dq_N dp_1 \cdots dp_N$$

in das transformierte Volumenelement

$$d^{2N}\xi = dQ_1 \cdots dQ_N dP_1 \cdots dP_N$$

über. Dabei hängt die Größe der Volumenelemente über die Jacobi-Determinante der Transformationsmatrix M zusammen:

$$d^{2N}\xi = |\det M| d^{2N}\eta$$

Da die Transformation kanonisch sein soll, gilt (5.8) und für die Determinante gilt

$$(\det M)^2 \det J = \det J \implies |\det M| = 1$$

Deshalb ist das Volumenelement im Phasenraum sowie das Volumen beliebiger Regionen unter kanonischen Transformationen erhalten.

5.4.3 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Wegen

$$\{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{und} \quad \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

kann man die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit Poisson-Klammern formulieren:

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\}, \quad \dot{p}_k = \{p_k, H\}$$

bzw.

$$\dot{\eta} = \{\eta, H\} = J \cdot \nabla_{\eta} H.$$

5.5 Erhaltungssätze, Liouville-Theorem

Wir haben bereits in Gleichung (5.9) gesehen, dass die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion f mit der Hamiltonfunktion auf dem betrachteten System ausgedrückt werden kann. Wegen dieser Beziehung gilt, dass f genau dann eine Erhaltungsgröße (Konstante der Bewegung) ist, wenn

$$\{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

gilt.

5.5.1 Poisson-Theorem

Seien f, g Erhaltungsgrößen. Dann ist $\{f, g\}$ ebenfalls eine Erhaltungsgröße.

$$\left. \begin{aligned} \{H, f\} &= \frac{\partial f}{\partial t} \\ \{H, g\} &= \frac{\partial g}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \{f, g\} = 0$$

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: f, g sind nicht explizit zeitabhängig. Dann folgt aus der Jacobi-Identität

$$\begin{aligned} 0 &= \{H, \{f, g\}\} + \underbrace{\{f, \{g, H\}\}}_{=0} + \underbrace{\{g, \{H, f\}\}}_{=0} \\ &= \{H, \{f, g\}\} = -\frac{d}{dt} \{f, g\} \end{aligned}$$

denn $\{f, g\}$ ist ebenfalls nicht explizit zeitabhängig.

2. Fall: f, g sind explizit zeitabhängig. Dann folgt aus der Jacobi-Identität und

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} + \{\{f, g\}, H\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} \\ &= \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} = 0 \end{aligned}$$

□

5.5.2 statistische Beschreibung makroskopischer Systeme

In den Ansätzen, die bisher gemacht wurden, konnte man aus der Kenntnis der Anfangsbedingungen sowie der Hamiltonfunktion eines Systems die zeitliche Entwicklung vollständig vorhersagen. Dieses Prinzip versagt, sobald die Zahl der Freiheitsgrade eine Größenordnung erreicht, in der man die Bewegungsgleichungen nicht mehr in vertretbarer Zeit lösen kann oder schlicht nicht alle Anfangsbedingungen kennt. Gerade bei makroskopischen Systemen ($N \sim 10^{23}$) ist der Ansatz der exakten Analyse meist nutzlos.

Man behilft sich deshalb damit, dass man sich auf Aussagen über „mittlere Größen“ beschränkt. Dabei mittelt man über ein sogenanntes *Ensemble* aus identischen Systemen (insbesondere mit gleicher Hamiltonfunktion), die mit (leicht) unterschiedlichen Anfangsbedingungen gestartet sind. Zu einem festen Zeitpunkt hat jedes dieser Systeme einen Zustand, der durch einen Punkt im Phasenraum identifiziert werden kann. Dadurch ist eine zeitabhängige *Zustandsdichte* gegeben, die man untersuchen kann.

Betrachtet man ein Volumenelement ΔV im Phasenraum, so „verformt“ sich dieses Volumenelement zwar unter Evolution des Systems, behält aber gemäß Abschnitt 5.4.2 sein Volumen. Deshalb ist die Zahl der Systeme ΔN pro Volumenelement konstant. Daraus folgt, dass die Zustands- oder Phasenraumdichte

$$\rho(q, p) = \frac{\Delta N}{\Delta V}$$

eine Konstante der Bewegung ist und es gilt

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\}}$$

(*Liouvillescher Satz*). Das bedeutet insbesondere *nicht*, dass „ähnliche Anfangsbedingungen“ zu ähnlichen Zielverteilungen führen. Lediglich das Volumen der Verteilung bleibt erhalten.

Im statistischen Gleichgewicht ist die Zahl der Ensembles in einem Zustand (q_{GG}, p_{GG}) zeitunabhängig.

$$\frac{\partial \rho_{GG}}{\partial t} = 0 = \{H, \rho_{GG}\}$$

5.6 Hamilton-Jacobi-Theorie

Dem aufmerksamen Leser wird bereits aufgefallen sein, dass wir die Frage und eigentliche Motivation zur Einführung der kanonischen Transformationen in Kapitel 5.2 noch nicht beantwortet haben: Wie findet man eine Transformation, so dass die Bewegungsgleichungen möglichst einfach werden? Mit der Theorie, die uns inzwischen zur Verfügung steht, stellt uns diese Fragestellung grundsätzlich vor keine großen Probleme.

Wir suchen eine kanonische Transformation, so dass die transformierte Hamiltonfunktion K konstant – ohne Einschränkung fordern wir: gleich Null – ist. Dafür benö-

5 Hamiltonsche Dynamik

tigen wir eine Erzeugende

$$S(q, P, t) := F_2(q, P, t) \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}$$

mit

$$H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial K}{\partial P_k} = 0, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q_k} = 0$$

liefern $2N$ Konstanten, die sich aus Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Sämtliche Informationen über die Zeitentwicklung des Systems steckt in der Erzeugenden S , die die partielle Differentialgleichung

$$\boxed{H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

(*Hamilton-Jacobi-Gleichung*) erfüllen muss. Dabei ist $S(q, P, t) = S(q, t)$ jetzt eine Funktion von nur noch $N + 1$ unabhängigen Variablen. Die allgemeine Lösung enthält $N + 1$ Integrationskonstanten, von denen eine additiv ist (wegen der Invarianz der Hamilton-Jacobi-Gleichung unter $S \rightarrow S + \text{const}$) und die übrigen N die P_k 's sind.

5.6.1 Separationsansatz für zeitunabhängigen Hamiltonian

Unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

gilt, kann man einen Separationsansatz für S machen.

$$S(q, P, t) = W(q, P) + T(t)$$

Dann ergibt Einsetzen in die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\begin{aligned} H\left(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_N}\right) + \frac{\partial T}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{\partial T}{\partial t} &= H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) =: E = \text{const} \\ \Rightarrow T &= -E \cdot t \end{aligned}$$

und man erhält eine neue partielle Differentialgleichung für W

$$\boxed{H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E}$$

5 Hamiltonsche Dynamik

(stationäre Hamilton-Jacobi-Gleichung).

W erzeugt natürlich auch eine kanonische Transformation vom Typ 2 mit der unveränderten Hamiltonfunktion

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} = H = E.$$

E ist einer der N freien Parameter in der Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung, wir können z.B. $P_1 = E$ wählen. Daraus folgt mit den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{\partial K}{\partial E} = 1 \\ Q_1 &= t + \text{const} = \frac{\partial W}{\partial E}\end{aligned}$$

wobei die letzte Identität aus der kanonischen Transformation stammt. Das heißt also, dass unter dieser Transformation die Zeit zur Energie kanonisch konjugiert ist.

5.6.2 Beispiele

folgen

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

In diesem Kapitel widmen wir uns konservativen mechanischen Systemen mit N Freiheitsgraden und einem Potential, das beispielsweise die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen beschreibt

$$V(q_1, \dots, q_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(q_i - q_j)$$

Der *Gleichgewichtszustand* zeichnet sich dadurch aus, dass die generalisierten Kräfte (1.4) verschwinden

$$\mathcal{F}_k = - \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q=q_0} = 0,$$

dass also die potentielle Energie extremal ist (minimal für stabiles Gleichgewicht). Im letzten Kapitel war eine Abweichung von q_0 durch die Zwangsbedingungen ausgeschlossen. Jetzt wollen wir solche Abweichungen explizit betrachten.

6.1 kleine Schwingungen

Dafür entwickelt man das Potential V um die Gleichgewichtslage ($q_k = q_{k,0} + \eta_k$).

$$V(q) = \underbrace{V(q_0)}_{\text{const}} + \underbrace{\left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_{q_0}}_{=0} \eta_k + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{q_0} \eta_k \eta_l + \mathcal{O}(\eta^3)$$

Die führende Ordnung für V ist also

$$V = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_0}.$$

Nehmen wir an, dass die kinetische Energie quadratisch in den generalisierten Geschwindigkeiten ist, kann man sie durch

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m_{ij}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_i \dot{q}_j \\ &\approx \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad T_{ij} = m_{ij}(q_{1,0}, \dots, q_{N,0}) \end{aligned}$$

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

ausdrücken, womit sich die Lagrange-Funktion zu

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i\eta_j)$$

ergibt. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\eta_i} = \frac{d}{dt}T_{ij}\dot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = \boxed{T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j \stackrel{!}{=} 0} \quad i = 1, \dots, N \quad (6.1)$$

und sind N gekoppelte lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Physikalisch erwartet man eine Schwingung um die Gleichgewichtslage, deshalb kann man einen Ansatz

$$\eta_i = a_i e^{i(\omega t + \delta)}$$

wählen, wobei die Bewegung nur vom Realteil beschrieben wird und die Frequenz ω für alle Koordinaten gleich sein soll.

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung (6.1) erhält man

$$(V_{ij} - \omega^2 T_{ij})a_j = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

ein *verallgemeinertes Eigenwertproblem* für ω^2 . Es gibt eine nichttriviale Lösung $a_i \neq 0$, falls

$$\det(V - \omega^2 T) = 0 \quad (6.2)$$

gilt. Dabei ist die linke Seite der Gleichung ein Polynom vom Grad N in ω^2 (insbesondere mit N Nullstellen). Die Lösungen von (6.2) nennen wir $\omega^{(n)}$. Weil (V_{ij}) und (T_{ij}) (?) symmetrisch sind, sind die Eigenwerte $(\omega^{(n)})^2$ reell und weil T positiv semidefinit ist sogar positiv. Die $a_j^{(n)}$ sind als Lösungen homogener Gleichungen mit reellen Koeffizienten ebenfalls reell.

Die Eigenvektoren bilden (bei geeigneter Normierung) eine Orthonormalbasis bezüglich T , es gilt also

$$a_i^{(n)} T_{ij} a_j^{(m)} = \delta_{nm}$$

und T induziert eine „Metrik“ für das Skalarprodukt der $a_j^{(n)}$.

Bisher wurden Schwingungen mit einer einzigen Frequenz $\omega^{(n)}$ als Lösungen verlangt – die sogenannten *Normalmoden*. Wegen der Existenz einer Orthogonalbasis lässt sich jedoch *jeder* Schwingungszustand durch Normalmoden ausdrücken. Hat man Anfangsbedingungen

$$\eta_j(t=0) = \sum_n A^{(n)} a_j^{(n)}, \quad A^{(n)} \in \mathbb{C},$$

so ist die Lösung im Schwingungsansatz

$$\eta_j(t) = \sum_n A^{(n)} a_j^{(n)} e^{i\omega^{(n)} t},$$

also eine überlagerte Schwingung. Für die Amplituden gilt

$$A^{(n)} = T_{ij} a_i^{(n)} \eta_j(t=0)$$

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

(kann man durch Einsetzen von η und Verwenden der Orthogonalität nachrechnen).
Man definiert nun die *Normalkoordinaten*

$$\rho^{(n)}(t) := \operatorname{Re} \left(A^{(n)} e^{i\omega^{(n)}t} \right),$$

mit denen die physikalische Bewegung als

$$\operatorname{Re}(\eta_j)(t) = \sum_n a_j^{(n)} \rho^{(n)}(t)$$

geschrieben werden kann. In diesen Koordinaten ergibt sich die Lagrange-Funktion (wie?) zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_n c^{(n)} \left\{ (\dot{\rho}^{(n)})^2 - (\omega^{(n)})^2 (\rho^{(n)})^2 \right\}.$$

Das ist die Lagrange-Funktion von N unabhängigen harmonischen Oszillatoren! Wir haben durch den Ansatz die Freiheitsgrade entkoppelt und so ein System harmonischer Schwingungen erhalten.

6.1.1 Beispiel lineare Kette

Das Beispiel, was bei dieser Thematik am naheliegendsten ist, ist wohl die schwingende Saite. Wir modellieren sie durch eine diskrete Masseverteilung, wobei jeder der N Massepunkte mit seinen Nachbarn über eine „Feder“ verbunden ist. Die Massepunkte sollen außerdem in der Ruhelage äquidistant sein.

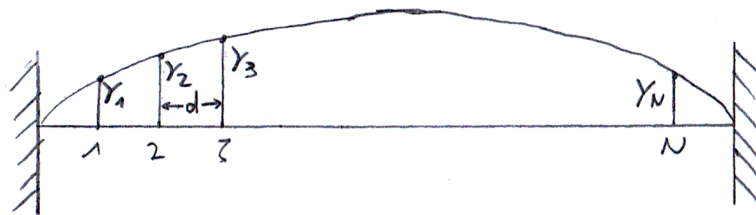


Abbildung 6.1: Modell der linearen Kette: N verbundene Massepunkte

Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 6.1 ist die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^N \dot{y}_k^2$$

und über Pythagoras ist der Abstand zwischen zwei Massepunkten

$$\Delta l = \left(d^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx d + \frac{1}{2d} (y_{k+1} - y_k)^2$$

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

wobei die Taylor-Entwicklung für kleine Auslenkungen $y_{k+1} - y_k$ ausgeführt wurde. Zusammen mit der Saitenspannung (Federkonstante) τ und der Randbedingung $y_0 = y_{N+1} = 0$ gilt dann

$$V = \frac{\tau}{2d} \sum_{k=0}^N (y_{k+1} - y_k)^2.$$

Die Matrizen T, V kann man jetzt ausrechnen:

$$T = m \mathbb{1}_N, \quad V = \frac{\tau}{d} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Normalfrequenzen $\omega^{(n)}$ sind Lösungen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{2\tau}{d} - m\omega^2 & -\frac{\tau}{d} & 0 & \cdots \\ -\frac{\tau}{d} & \frac{2\tau}{d} - m\omega^2 & -\frac{\tau}{d} & \\ 0 & -\frac{\tau}{d} & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (6.3)$$

und die Gleichung für die Normalmoden lautet

$$-m\omega^2 a_k + \frac{2\tau}{d} a_k - \frac{\tau}{d} a_{k+1} - \frac{\tau}{d} a_{k-1} = 0 \quad (6.4)$$

(Matrix $V - \omega^2 T$ mit (a_k) multiplizieren und die Spalten summieren). Das ist eine lineare Gleichung mit k unabhängigen Koeffizienten, weshalb man unweigerlich und völlig offensichtlich auf einen Fourier-Ansatz geführt wird.

$$a_k = a e^{i(k\gamma - \delta)}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Dabei sind γ, δ Konstanten, die wir den Randbedingungen entsprechend wählen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a_0) = 0 &\Rightarrow a \operatorname{Re}(e^{-i\delta}) = 0 \\ &\Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a_{N+1}) = 0 &\Rightarrow a \operatorname{Re}(e^{i((N+1)\gamma - \frac{\pi}{2})}) = 0 \\ &\Rightarrow \sin((N+1)\gamma) = 0 \end{aligned}$$

Das liefert folgende mögliche Lösungen für γ .

$$\gamma^{(n)} = \frac{\pi}{N+1} \cdot n$$

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

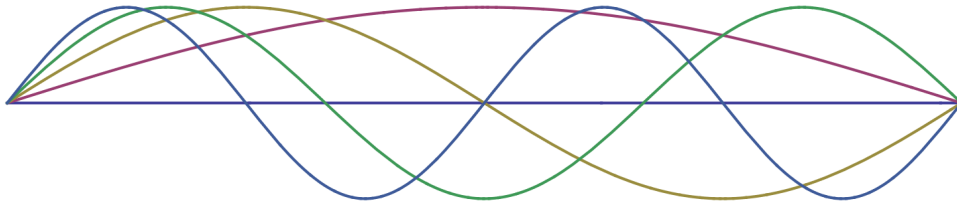


Abbildung 6.2: Die ersten fünf Normalmoden

Setzt man den Fourier-Ansatz für a_k in die Gleichung für die Normalmoden (6.4) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\tau}{d} - m\omega^2\right) a e^{i(k\gamma - \delta)} - \frac{\tau}{d} a \left(e^{i((k+1)\gamma - \delta)} + e^{i((k-1)\gamma - \delta)}\right) &= 0 \\ \implies \left(\frac{2\tau}{d} - m\omega^2\right) - \frac{\tau}{d} (e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) &= 0 \\ \implies \omega^2 = \frac{2\tau}{md} (1 - \cos \gamma) = \frac{4\tau}{md} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

Jetzt kann man γ einsetzen und erhält

$$\omega^{(n)} = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin \frac{\pi n}{2(N+1)}$$

Vor der Lösung des Eigenwertproblems mittels Determinante haben wir uns jetzt gedrückt. Theoretisch müssten diese Lösungen aber auch (6.3) erfüllen.

Das Resultat kann man jetzt in den ursprünglichen Ansatz einsetzen

$$y_k = \sum_n \operatorname{Re} \left(A^{(n)} a_k e^{i\omega^{(n)} t} \right) \sim \cos(\omega^{(n)} t) \sin \left(\frac{k\pi n}{N+1} \right)$$

Der zeitunabhängigen Sinus-Term (eine ortsabhängige Einhüllende der Schwingung) ist in Abbildung 6.2 zu sehen.

6.2 Parametrische Resonanz

Die Bewegungsgleichung eines gewöhnlichen harmonischen Oszillators lautet

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (6.5)$$

Ein allgemeinerer Typ Bewegungsgleichungen ist der der *Hillschen Gleichung*

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{q} + a(t)\dot{q} + b(t)q &= 0 \\ a(t+T) &= a(t), \quad b(t+T) = b(t) \end{aligned}} \quad (6.6)$$

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

mit zeitabhängigen, aber periodischen Koeffizienten a, b . Die Gleichung ist invariant unter Verschiebung der Zeit um T . Beispiele für solche Bewegungsgleichungen sind Systeme mit periodischem Antrieb und werden später explizit ausgerechnet.

Wie man (6.6) lösen kann ist Inhalt des *Floquet-Theorems* (in der Festkörperphysik auch *Bloch-Theorem*): Es existieren komplexe Lösungen von (6.6) mit

$$q(t) = P(t)e^{i\mu t}, \quad (6.7)$$

wobei P eine T -periodische Funktion und μ der sogenannte *charakteristische Exponent* ist. Die eigentliche Formulierung des Floquet-Theorems bezieht sich auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung und hantiert mit Matrixexponentialen und Fundamentalmatrizen. Ich bin mir sicher, dass ich das irgendwann auch verstehen werde.

Weil (6.6) eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, ist die Lösung eindeutig festgelegt durch die Anfangsbedingungen $q(0), \dot{q}(0)$. Wegen der Linearität lassen sich beliebige Lösungen durch Linearkombination von zwei unabhängigen Lösungen darstellen, beispielsweise mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \textcircled{A} : \quad & q_A(0) = 1, \dot{q}_A(0) = 0 \quad \rightsquigarrow q_A(t) \\ \textcircled{B} : \quad & q_B(0) = 0, \dot{q}_B(0) = 1 \quad \rightsquigarrow q_B(t) \end{aligned}$$

und der Linearkombination

$$q(t) = q(0)q_A(t) + \dot{q}(0)q_B(t).$$

Betrachtet man das System nach einer Periode T der Koeffizienten erneut, findet man

$$\begin{aligned} q(T) &= q_A(T)q(0) + q_B(T)\dot{q}(0) =: \alpha q(0) + \beta \dot{q}(0) \\ \dot{q}(T) &= \dot{q}_A(T)q(0) + \dot{q}_B(T)\dot{q}(0) =: \gamma q(0) + \delta \dot{q}(0) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}_{t=T} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{=: M} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}_{t=0} \end{aligned}$$

Die Einträge der so definierten Matrix M müssen in der Regel numerisch¹ bestimmt werden. Wegen der Invarianz von (6.6) unter Verschiebung des Zeitursprungs um T gilt sogar

$$\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}_{t=nT} = M^n \cdot \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}_{t=0}$$

und die Stabilität der Lösung kann an den Eigenwerten von M abgelesen werden. Das liegt darin begründet, dass die Lösung nur stabil ist, wenn kein Eintrag von M^n unbeschränkt ist. Bekanntermaßen rechnet man die Matrixpotenz am geschicktesten aus, indem man die Matrix durch $M = U^{-1}DU$ auf Diagonalform bringt (mit den Eigenwerten auf der Diagonale). Dann gilt nämlich $M^n = U^{-1}D^nU$ und es gehen nur noch Potenzen der Eigenwerte ein.

¹manche Leute lesen hier auch *unwirsch*, was die Sache auch gut beschreibt

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

Aus dem Liouville-Theorem folgt (wie?), dass $\det M = 1$ ist, falls kein Dämpfungsterm vorhanden ist. Dann berechnet man die Eigenwerte λ mit

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow & (\alpha - \lambda)(\delta - \lambda) - \beta\gamma = 0 \\ \Rightarrow & \lambda^2 - \underbrace{(\alpha + \delta)}_{=\text{Spur}M} \lambda + \underbrace{\alpha\delta - \beta\gamma}_{=\det M=1} = 0 \\ \Rightarrow & \lambda = \frac{\text{Spur}M}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\text{Spur}M)^2 - 1} \end{aligned}$$

Im Wesentlichen sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden. Ist $\text{Spur}M < 2$, so sind die Eigenwerte komplex mit

$$\lambda = \frac{\text{Spur}M}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{1}{4}(\text{Spur}M)^2}$$

(die beiden Eigenwerte sind also komplex konjugiert) und $|\lambda| = 1$. In diesem Fall haben wir gerade eine stabile Lösung vorliegen. Falls jedoch $\text{Spur}M > 2$ gilt, so sind beide Eigenwerte reell und einer von ihnen ist größer als 1 (das Produkt aus beiden ist 1). Dementsprechend wächst λ^n beliebig an und es liegt eine instabile Lösung vor.

Wählt man im stabilen Fall die Konstante μ in (6.7) so, dass

$$\lambda = e^{i\mu T}$$

gilt, so hat man eine Lösung gefunden (warum? wählt man zwei Konstanten?).

6.2.1 Beispiel: Federpendel mit oszillierendem Aufhängepunkt

Wir variieren die Bewegungsgleichung des Federpendels (6.5), um die zeitabhängige Auslenkung am Aufhängepunkt einzubringen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (1+r)x &= 0 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \ddot{x} + (1-r)x &= 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{aligned} \quad (\text{mod } T)$$

Dabei wurde durch eine Reskalierung der Zeit $\omega^2 = \frac{k}{m} = 1$ gewählt. Für diese Differentialgleichung muss man (theoretisch) keine numerische Lösung wählen, weil sich die Matrix M analytisch bestimmen lässt. Weder ich noch mein Kumpel Mathematica haben das leider geschafft – glücklicherweise kenne ich die Matrix jedoch.

$$\begin{aligned} M(T, r) &= \begin{pmatrix} \cos \Gamma_- & \frac{1}{\sqrt{1-r}} \sin \Gamma_- \\ \frac{-1}{\sqrt{1-r}} \sin \Gamma_- & \cos \Gamma_- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \Gamma_+ & \frac{1}{\sqrt{1+r}} \sin \Gamma_+ \\ \frac{-1}{\sqrt{1+r}} \sin \Gamma_+ & \cos \Gamma_+ \end{pmatrix} \\ &\text{mit } \Gamma_{\pm} = \sqrt{1 \pm r} \frac{T}{2} \end{aligned}$$

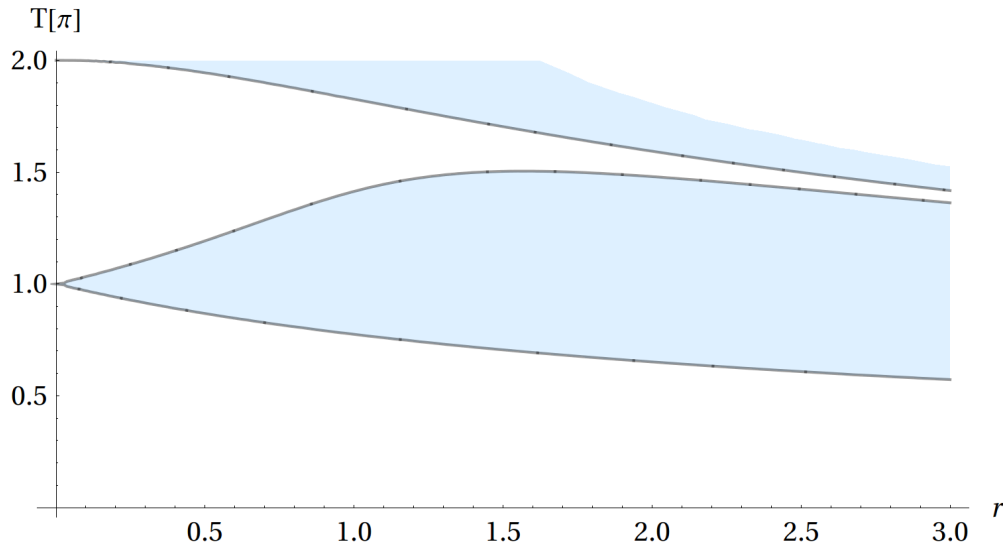


Abbildung 6.3: Das Federpendel wird bei der Eigenfrequenz ($T = 2\pi$) und der doppelten Eigenfrequenz ($T = \pi$) des ungestörten Systems instabil.

Damit kann man die Spur

$$\frac{1}{2} \text{Spur} M(T, r) = \cos \Gamma_+ \cos \Gamma_- - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \sin \Gamma_+ \sin \Gamma_-$$

ausrechnen und in Abbildung 6.3 sieht man die Bereiche, in denen sich das System aufschaukelt und instabil ist.

6.2.2 Beispiel: Fadenpendel mit oszillierendem Aufhängepunkt

Der Aufhängepunkt eines Fadenpendel oszilliere in vertikaler Richtung mit der Auslenkung $Y(t) = Y_0 \cos \Omega t$. Für kleine Auslenkungen θ des Pendels gilt dann

$$x = l \sin \theta \approx l\theta$$

$$y = Y(t) + l(1 - \cos \theta) \approx Y(t) + \frac{l}{2}\theta^2$$

und für die kinetische Energie gilt

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{Y}\theta\dot{\theta})$$

(höhere Ordnungen in $\theta, \dot{\theta}, \dot{Y}$ werden vernachlässigt). Mit $V = mgy$ findet man die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\delta(T - V)}{\delta\theta} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{1}{l}(g + \dot{Y})\theta = 0.$$

Nach einer Reskalierung der Zeit $\tau = \frac{\Omega t}{2}$ erhält man

$$\frac{\Omega^2}{4} \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \left(\frac{g}{l} - \frac{Y_0 \Omega^2}{l} \cos 2\tau \right) \theta = 0$$

$$\implies \boxed{\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau)\theta = 0}, \quad a = \left(\frac{2\omega_0}{\Omega} \right)^2 > 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, q = \frac{2Y_0}{l}$$

(*Mathieu-Gleichung*). Sie beschreibt eine ganze Klasse von Problemen, in der Quantenmechanik beispielsweise Teilchen in einem periodischen Potential.

Der Parameter a gibt das Verhältnis von Eigenfrequenz und Frequenz der Aufhängung an und ist hier immer positiv. Für $a = 1$ (Antrieb mit doppelter Eigenfrequenz) ist das System immer instabil („parametrische Resonanz“). Weitere Instabilitäten sind bei $\Omega = \frac{2\omega_0}{n}$ zu finden. Je größer die Amplitude der Anregung q ist, desto größer sind die Bereiche der Instabilität.

Für den Fall $a < 0$ (z.B. invertiertes Pendel) gibt es stabile Lösungen für $\Omega \gg \omega_0$ und q groß genug (kennt man vom Balancieren eines Besenstiels). Gibt es einen Dämpfungsterm, so treten die Instabilitäten erst bei hinreichend großer Amplitude q auf (auch Anregung mit $a = 1$ ist dann möglich).

6.3 Anharmonische Oszillatoren

Ein relativ simples Modell für einen Oszillator, der nichtlineare Terme in der Bewegungsgleichung enthält, ist der *Duffing-Oszillator*, der durch die Gleichung

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q + \epsilon q^3 = f \cos \omega t \tag{6.8}$$

beschrieben wird. Dabei ist die rechte Seite der Gleichung ein periodischer Antrieb des Oszillators und für $\epsilon = 0$ erhält man einen harmonischen gedämpften Oszillator. In diesem Fall schwingt das System nach dem Einschwingvorgang mit der Frequenz ω des Erregers. Der Resonanzfall liegt dann bei $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma}{2}}$ (bei geringer Dämpfung Resonanzkatastrophe).

Nach Kapitel 3.1.1 ist für den Fall $\epsilon \neq 0$ die Eigenfrequenz eine Funktion der Energie und für $\omega \approx \omega_0$ sind stabile Oszillationen (auch ohne Dämpfung) möglich.

6.3.1 harmonische Lösung

Um (6.8) im dämpfungsfreien Fall ($\gamma = 0$) zu lösen nehmen wir an, dass die Lösung periodisch ist. Wegen der Dämpfungsfreiheit soll die Lösung ferner invariant unter Zeitumkehr sein. Das legt nahe, die Lösung als Überlagerung von kosinusförmigen Schwingungen darzustellen (Entwicklung in einer Fourier-Reihe):

$$q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}(\omega) \cos((2n+1)\omega t)$$

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

Man kann durch numerische Berechnungen feststellen, dass dabei für die Koeffizienten gilt $A_1 \gg A_3 \gg \dots$, so dass die ersten beiden Terme die Dominanten sind. Unter Ausnutzung der Identität $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x)$ kann man den Ansatz in die Bewegungsgleichung einsetzen und erhält

$$(\omega_0 - \omega^2)A_1 \cos \omega t + (\omega_0^2 - 9\omega^2)A_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + \epsilon \left(\frac{3}{4}A_1^3 \cos \omega t + \frac{1}{4}A_1^3 \cos 3\omega t + \dots \right) = f \cos \omega t.$$

Die Terme proportional zu $\cos n\omega t$ müssen einzeln verschwinden (weil man sie durch Fourier-Analyse trennen kann). Deshalb gilt

$$\boxed{(\omega_0^2 - \omega^2)A_1 + \frac{3\epsilon}{4}A_1^3 = f}, \quad (\omega_0^2 - 9\omega^2)A_3 + \frac{\epsilon}{4}A_1^3 = 0 \quad (6.9)$$

Entwickelt man die Fourier-Reihe bis zu höheren Ordnungen (insbesondere tauchen dann in der großen Klammer auch gemischte Terme wie $A_1^2 A_3$ auf), erhält man Lösungen höherer Genauigkeit.

6.3.2 Störungstheorie

Für den Ansatz aus der Störungstheorie schreiben wir (6.8) um:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \mu \{ (\omega^2 - \omega_0^2)q - \epsilon q^3 + f \cos \omega t \} \quad (6.10)$$

Diese Gleichung stimmt für $\mu = 1$ mit dem Duffing-Oszillator überein, für $\mu \ll 1$ ist das eine kleine Störung der homogenen Gleichung des harmonischen Oszillators mit Frequenz ω (nicht $\omega_0!$). Eigentlich erscheint der Ansatz, den man im Folgenden macht, nur für kleine Störungen sinnvoll. Erstaunlicherweise führt das aber auch für den Duffing-Oszillator zu sinnvollen Ergebnissen. Der genannte Ansatz lautet jetzt

$$q(t) = q_0(t) + \mu q_1(t) + \mu^2 q_2(t) + \dots$$

Löst man mit diesem Ansatz alleine die Bewegungsgleichungen (und trennt dabei die Potenzen von μ), so erhält man *säkulare* (nichtperiodische) Terme. Um diese Terme wieder aus der Lösung herauszubekommen, brauchen wir zusätzliche Variablen, die wir so wählen, dass die unerwünschten Terme herausfallen.

Eine Möglichkeit besteht darin, die Frequenz ω ebenfalls in μ zu entwickeln und einen Variablenwechsel $t \rightarrow \tau = \omega(\mu)t$ durchzuführen (*Lindstedt-Poincaré*). Eine andere Möglichkeit, die hier gerechnet werden soll, ist, eine Phasenverschiebung δ zwischen äußerer Kraft und Auslenkung einzubauen. Diese Phasenverschiebung entwickelt man ebenfalls in μ

$$\delta(\mu) = \delta_0 + \mu\delta_1 + \mu^2\delta^2 + \dots$$

und führt wieder einen Variablenwechsel $t \rightarrow \tau = \omega t - \delta(\mu)$ durch. Die Bewegungsgleichung (6.10) hat nach dem Variablenwechsel die Form

$$\ddot{q} + q = \mu \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) q - \mu \frac{\epsilon}{\omega^2} q^3 + \mu \frac{f}{\omega^2} \cos(\tau + \delta(\mu))$$

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

(\dot{q} ist jetzt $\frac{dq}{d\tau}$). Setzt man jetzt die Entwicklung von q und δ in μ ein (mit Entwicklung von $\cos(\tau + \delta)$) und lässt die Potenzen von μ einzeln verschwinden, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{q}_0 + q_0 &= 0 \\ \ddot{q}_1 + q_1 &= \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) q_0 - \frac{\epsilon}{\omega^2} q_0^3 + \frac{f}{\omega^2} \cos(\tau + \delta_0) \\ \ddot{q}_2 + q_2 &= \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) q_1 - \frac{1}{\omega^2} (3\epsilon q_0^2 q_1 + \delta_1 f \sin(\tau + \delta_0))\end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen $\dot{q}_i(t=0) = 0$ kann man die Lösung der ersten Gleichung direkt hinschreiben:

$$q_0(\tau) = A_1 \cos \tau$$

Nach Einsetzen in die zweite Gleichung und wieder Benutzung von $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x)$ findet man

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + q_1 &= \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) A_1 \cos \tau \\ &\quad - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{3}{4} \epsilon A_1 \cos \tau - f \cos \delta_0 \cos \tau + \frac{1}{4} \epsilon A_1^3 \cos 3\tau + f \sin \delta_0 \sin \tau \right)\end{aligned}$$

Da für die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + x = a \cos t + b \sin t, \quad \dot{x}(0) = 0$$

die allgemeine Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2}((a - bt + 2C) \cos t + (b + at) \sin t)$$

lautet (also sekulär ist), müssen die Koeffizienten von $\sin \tau$ und $\cos \tau$ verschwinden ($\cos 3\tau$ macht keine Probleme). Daraus erhält man einerseits

$$\sin \delta_0 = 0 \Rightarrow \cos \delta_0 = 1$$

und andererseits

$$(\omega^2 - \omega_0^2)A_1 - \frac{3}{4}\epsilon A_1^3 + f = 0$$

(vgl. (6.9)). Die führende Ordnung stimmt also (bis auf die Phasenverschiebung) mit der führenden Ordnung der harmonischen Approximation überein.

Als verbleibende Bewegungsgleichung für q_1 haben wir dann

$$\ddot{q}_1 + q_1 = -\frac{\epsilon}{4\omega} A_1^3 \cos 3\tau$$

mit der Lösung

$$q_1(\tau) = \underbrace{B_1 \cos \tau}_{\text{homog. Teil}} + \underbrace{\frac{\epsilon}{32\omega^2} A_1^3 \cos 3\tau}_{\text{spezielle Lösung}}$$

6 Gekoppelte Schwingungen, nichtlineare Dynamik

Die Integrationskonstante B_1 bestimmen wir durch die Forderung, dass auch in der Bewegungsgleichung für q_2 die säkularen Terme verschwinden müssen.

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = 0 \\ B_1 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{9\epsilon}{4\omega^2} A_1^2 \right) - \frac{3\epsilon^2}{128\omega^4} A_1^5 = 0 \end{cases}$$

Die verbleibende Gleichung für q_2 enthält auch die fünfte Harmonische $\sim \cos 5\tau$.

Insgesamt haben wir herausgefunden, dass die Phasenverschiebung (zumindest in den ersten beiden Ordnungen) verschwindet und für $\mu = 1$ (wir wollten ja eigentlich den Duffing-Oszillator lösen) erhält man eine genäherte Lösung durch

$$q(t) \approx q_0(t) + q_1(t) + q_2(t),$$

wobei wir festgestellt haben, dass diese Lösungen gerade Fourierreihen sind. Stimmen die Koeffizienten mit denen aus dem Fourier-Ansatz überein? Insgesamt ist mir der Einsatz der Störungsrechnung an diesem Beispiel noch nicht ganz klar.

6.3.3 sub-harmonische Schwingungen

In diesem Abschnitt wollen wir überlegen, ob der ungedämpfte Duffing-Oszillator mit einer subharmonischen Frequenz (also $\frac{\omega}{n}, n \in \mathbb{N}$) stabil schwingen kann. Man substituiert dafür wieder $\tau = \omega t$, lässt den Antrieb aber mit 3ω oszillieren, so dass die Bewegungsgleichung

$$\omega^2 \ddot{q} + \omega_0^2 q + \epsilon q^3 = f \cos 3\tau$$

lautet. Als Ansatz für die subharmonische Schwingung wählt man

$$q_0 = A \cos \tau + B \sin \tau + \frac{f}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \cos 3\tau.$$

Das Einsetzen in die Bewegungsgleichung führt zu langen Termen (wegen der dritten Potenz), durch die Forderung, dass säkulare Terme ($\sim \sin \tau, \cos \tau$) verschwinden, findet man zwei Gleichungen für die Amplituden A und B . Eine Lösung existiert für $B = 0$ – dann ist die Lösung für A

$$A(f) = -\frac{f}{2(\omega_0^2 - 9\omega^2)} \pm \sqrt{\frac{D(f)}{3}}$$

mit $D(f) = 16 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\epsilon} - 21 \frac{f^2}{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2} > 0$ (damit $A \in \mathbb{R}$).

Um die Stabilität dieser Lösungen zu überprüfen, entwickelt man die Bewegungsgleichung um q_0 : $q = q_0 + \xi$. Damit erhält man eine Form der Hillschen Differentialgleichung für die Störung ξ .

$$\omega^2 \ddot{\xi} + (\omega_0^2 + 3\epsilon q_0^2) \xi = 0$$

Diese Differentialgleichung kann man wie gehabt gemäß dem Floquet-Theorem untersuchen und dabei findet man, dass die Lösung für A mit $+$ vor der Wurzel (in der Grafik die obere, rote Kurve) eine stabile Lösung zulässt. Wir haben also tatsächlich eine stabile Oszillation mit einem Drittel der antreibenden Frequenz gefunden.

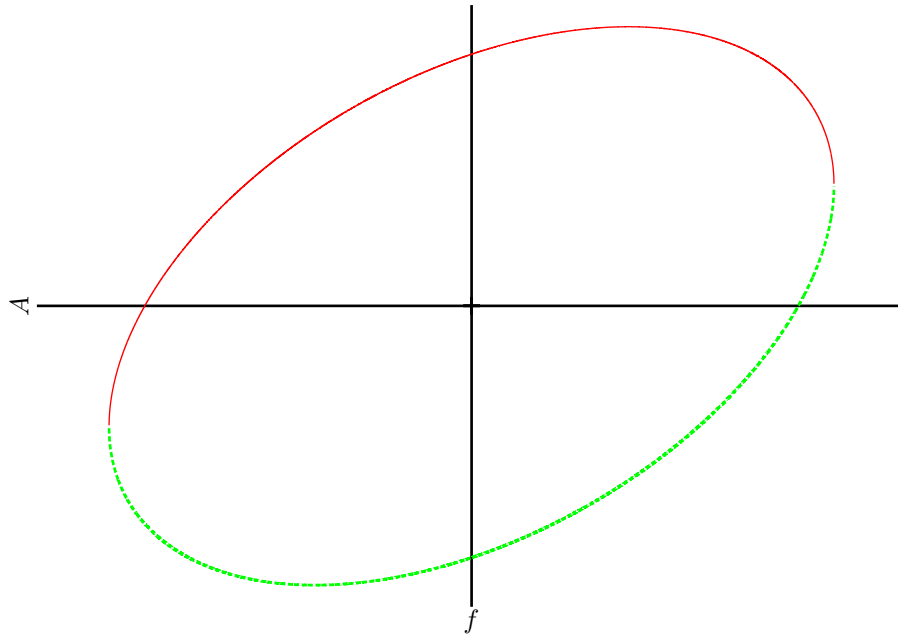


Abbildung 6.4: Amplitude der subharmonischen Schwingung A in Abhängigkeit von der Amplitude der Anregung f

6.4 Jenseits Störungsrechnung, Poincaré-Birkhoff-Theorem

Aufgrund von Unverständnis meinerseits überspringe ich dieses Kapitel zunächst. Was das Poincaré-Birkhoff-Theorem genau ist, wird ohnehin nicht im Skript genannt...

7 Spezielle Relativität

Die Newtonsche Mechanik funktioniert in jedem Inertialsystem, insbesondere also in einem System, das sich relativ zum Beobachter mit konstanter Geschwindigkeit v in positive x -Richtung bewegt. Über die Galilei-Transformation hängen die Koordinaten in beiden Systemen zusammen.

$$\begin{aligned}t' &= t & x' &= x - vt \\y' &= y & z' &= z\end{aligned}$$

Die Zeit ist also in allen Inertialsystemen gleich, aber Geschwindigkeiten transformieren wie

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v},$$

so dass es keine universellen Geschwindigkeiten gibt. Das widerspricht den Maxwellgleichungen, die eine universelle Geschwindigkeit zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen vorhersagen. In diesem Sinne hat Albert Einstein zwei Postulate aufgestellt, aus denen sich die vollständige spezielle Relativitätstheorie herleiten lässt.

1. Die Gesetze der Physik sind für alle Beobachter in Inertialsystemen gleich.
2. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.

Wenn die Lichtgeschwindigkeit ohnehin eine Konstante ist, kann man sie auch gleich möglichst einfach halten. Diesem Prinzip folgend wird in der Regel die Annahme $c = 1$ getroffen. Dann werden Geschwindigkeiten in Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit und Längen wie Zeiten in Einheiten der reziproken Energie gemessen.

7.1 Raum-Zeit-Diagramme

Um die Vorgänge bei Transformationen, die Einsteins Postulaten genügen, zu verdeutlichen, greift man auf Raum-Zeit-Diagramme (auch: Minkowski-Diagramme) zurück. Weiterhin lässt sich auch die Trajektorie eines Teilchens in einem Raum-Zeit-Diagramm auftragen (*Weltlinie*). Einen Punkt im Raum-Zeit-Diagramm (also ein paar aus Zeit und Ort) nennt man *Ereignis*. Üblicherweise werden wir nur zweidimensionale Diagramme betrachten (vierdimensionales Papier gibt es noch nicht), deshalb reduzieren wir in der Regel die Zahl der Raumdimensionen auf 1. Durch die Wahl von

7 Spezielle Relativität

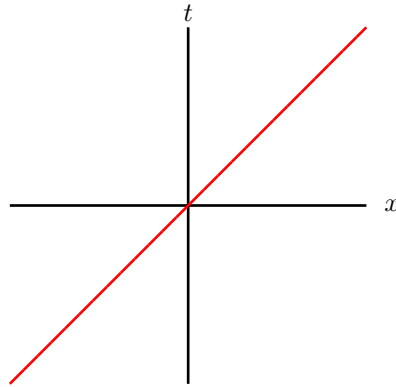


Abbildung 7.1: Weltlinie eines Lichtstrahls, der zur Zeit $t = 0$ den Ursprung des Bezugssystems passiert

$c = 1$ ist die Weltlinie eines Lichtstrahls, der sich in positive x -Richtung ausbreitet, im Raum-Zeit-Diagramm gerade die Winkelhalbierende mit Steigung 1.

Um herauszufinden, wie man Größen zwischen Inertialsystemen transformiert, so dass Einsteins Postulate erfüllt sind, werden wir uns Gedankenexperimente zuhelfe nehmen. Zunächst sei Σ ein Inertialsystem und Σ' ein sich gleichmäßig mit Geschwindigkeit v in positive x -Richtung bewegendes Inertialsystem. Außerdem fordern wir, dass zur Zeit $t = t' = 0$ die Ursprünge zusammenfallen ($t = t'$ gilt sonst im Allgemeinen nicht!).

Die Position des Ursprungs von Σ' erfüllt also $x = vt = \beta \cdot ct$ mit $\beta = \frac{v}{c} < 1$ in Σ . Die Weltlinie von Σ' ($x' = 0$) ist also eine Gerade mit Steigung $\frac{1}{\beta} > 1$ in Σ und natürlich die t' -Achse in Σ' . Wir haben also die Lage der t' -Achse in Σ bereits gefunden.

Wie verhält es sich mit der Raum-Zeit-Trajektorie der x' -Achse? Wir nehmen an, dass in Σ' zur Zeit $t' = -L$ am Ursprung ein Lichtblitz in $+x$ -Richtung startet. Dann erreicht er bei $t' = 0$ einen Spiegel bei $x' = L$ und wird reflektiert, um schließlich zur Zeit $t' = L$ wieder am Ursprung anzukommen. Die Raum-Zeit-Diagramme dazu sieht man in Abbildung 7.2.

In Σ kennt man die Lage der t' -Achse, nicht jedoch den Abstand τ der Ereignisse vom Ursprung. Wir nennen den Punkt auf der t' -Achse, an dem der Lichtstrahl ausgesendet wird, τ_0 , den gegenüberliegenden Punkt, an dem der Lichtstrahl wieder eintrifft τ_1 . Man kann sie vektoriell ausdrücken durch

$$\tau_{0,1} = \mp \frac{\tau}{\sqrt{1 + \beta^2}}(\beta, 1)$$

Die Lichtstrahlen verbinden die beiden Ereignisse auf eindeutige Weise (Steigung 1) –

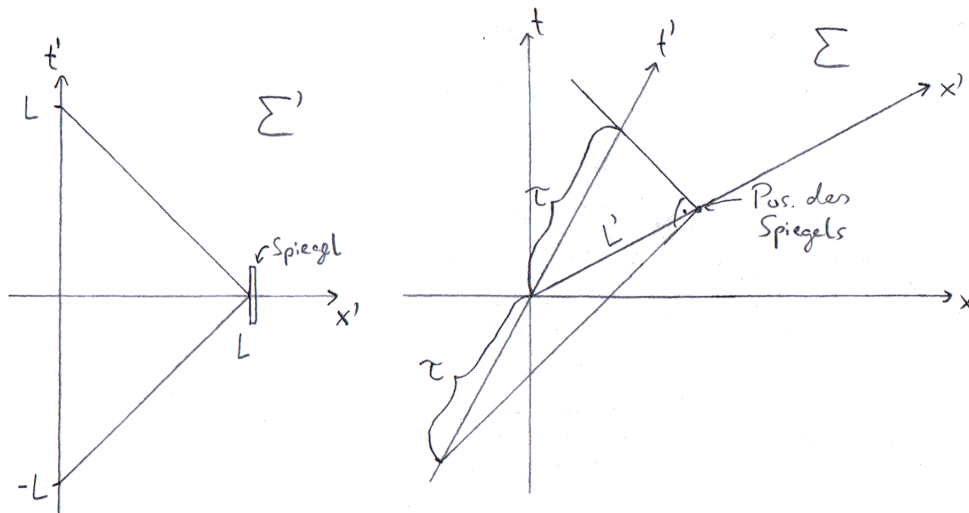


Abbildung 7.2: Weltlinien des Lichtstrahl in Σ' (links) und in Σ (rechts)

und an der Stelle des Richtungswechsels muss sich der Spiegel befinden.

$$-\frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(\beta, 1) + r(1, 1) + s(-1, 1) = +\frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(\beta, 1)$$

$$\Rightarrow r = \frac{1+\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\tau, \quad s = \frac{1-\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\tau$$

Demnach befindet sich der Spiegel am Punkt

$$-\frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(\beta, 1) + r(1, 1) = \frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(1, \beta)$$

also auf einer Geraden mit Steigung β . Dass er auch den Abstand τ vom Ursprung hat, war bereits geometrisch zu sehen: wir haben ein Dreieck im Thales-Kreis konstruiert...

Die Information, wie die Weltlinien der Koordinatenachsen eines bewegten Systems aussehen, werden wir im Folgenden Abschnitt benutzen.

7.2 Lorentz-Transformation

Gesucht ist eine Koordinatentransformation zwischen Σ und Σ' , die drei Bedingungen erfüllt.

1. die t' -Achse ist in Σ parallel zur Geraden mit Richtung $(\beta, 1)$
2. die x' -Achse ist in Σ parallel zur Geraden mit Richtung $(1, \beta)$

7 Spezielle Relativität

3. die Transformation ist linear, Geraden werden also wieder auf Geraden abgebildet

Der allgemeine Ansatz dafür lautet

$$(x, t) = \gamma(\beta) x' + \tilde{\gamma}(\beta) t' \\ \text{bzw. } x = \gamma(\beta)x' + \tilde{\gamma}(\beta)\beta t', \quad t = \gamma(\beta)\beta x' + \tilde{\gamma}(\beta)t'$$

mit noch zu bestimmenden Skalenfaktoren $\gamma(\beta), \tilde{\gamma}(\beta)$. Aus Symmetriegründen hat die Transformation $(x, t) \rightarrow (x', t')$ dieselbe Form bis auf die Ersetzung $\beta \rightarrow -\beta$.

$$x' = \gamma(-\beta)x - \tilde{\gamma}(-\beta)\beta t, \quad t' = -\gamma(-\beta)\beta x + \tilde{\gamma}(-\beta)t$$

Überlegt man sich, dass man beim Spiegelexperiment die Richtung des Lichtstrahls (und des Spiegels) ändert, findet man

$$\gamma(\beta) = \gamma(-\beta), \quad \tilde{\gamma}(\beta) = \tilde{\gamma}(-\beta)$$

Alles zusammengemixt ergibt zwei homogene Gleichungen für x', t' (alternativ auch für x, t).

$$x' = \gamma^2 x' + \gamma \tilde{\gamma} \beta t' - \tilde{\gamma} \gamma \beta^2 x' - \tilde{\gamma}^2 \beta t' \\ t' = -\gamma^2 \beta x' - \gamma \tilde{\gamma} \beta^2 t' + \tilde{\gamma} \gamma \beta x' + \tilde{\gamma}^2 t'$$

Weil diese Gleichungen für beliebige x', t' gelten, müssen die Koeffizienten einzeln verschwinden. Es folgen vier Gleichungen, aus denen man $\gamma, \tilde{\gamma}$ bestimmen kann.

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \gamma^2 + \gamma \tilde{\gamma} \beta^2 = 0 \\ \gamma \tilde{\gamma} \beta - \tilde{\gamma}^2 \beta = 0 \\ 1 + \gamma \tilde{\gamma} \beta^2 - \tilde{\gamma}^2 = 0 \\ -\gamma^2 \beta + \gamma \tilde{\gamma} \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\tilde{\gamma} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1}$$

Damit haben wir die *Lorentz-Transformation* gefunden:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x' = \gamma(x - \beta t) & t' = \gamma(t - \beta x) \\ x = \gamma(x' + \beta t') & t = \gamma(t' + \beta x') \end{array}}$$

Wegen der Vorfaktoren nennt man den Effekt dieser Transformation auch *Gamma-Boost*.

7.2.1 Relativistische Effekte

1. Zeit-Dilatation – Bewegte Uhren gehen langsamer

Eine Uhr befinde sich im Ursprung von Σ' ($x' = 0$). Ein in Σ ruhender Beobachter sieht diese Uhr gemäß den Transformationsgleichungen bei $x = \beta t$. Die Zeit, die sie anzeigt ist $t' = \gamma(t - \beta^2 t) = \sqrt{1 - \beta^2} t = \frac{1}{\gamma} t$. Also ist ein Zeitintervall $\Delta t'$ auf der t' -Achse in Σ um den Faktor $\gamma > 1$ länger.

7 Spezielle Relativität

2. Lorentz-Kontraktion

Analog kann man den Fall betrachten, dass ein Stab in Σ' auf der x' -Achse ruht. Misst man dort gleichzeitig die Orte beider Enden ($\Delta t' = 0$), so erhält man die Ruhelänge $\Delta x' = D'$. Im Bezugssystem Σ misst man ebenfalls gleichzeitig ($\Delta t = 0$), über die Transformationsgleichungen erhält man jedoch $\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x' = \sqrt{1 - \beta^2} D'$ – der Stab erscheint also verkürzt.

Im Minkowski-Diagramm kann das „gleichzeitige Messen“ durch eine Parallele zur x -Achse (bzw. x' -Achse) durch den Zeitpunkt der Messung auf der t -Achse (t' -Achse) visualisiert werden. Im Allgemeinen sind die Koordinatensysteme dort ja nicht orthogonal (genauer: genau eines ist orthogonal – das des ruhenden Bezugssystems).

3. Relativität der Gleichzeitigkeit

Finden zwei Ereignisse in Σ' gleichzeitig ($\Delta t' = 0$) im räumlichen Abstand D' voneinander statt, so gilt in Σ : $\Delta t = \gamma \beta D' = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} D'$, es existiert also ein zeitlicher Abstand zwischen den Ereignissen.

4. Transformation von Flächen

Die Jacobi-Matrix der Lorentz-Transformation lautet

$$J = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \quad \det J = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1.$$

Deshalb gilt $dx'dt' = \det(J) dxdt = dxdt$, Flächeninhalte bleiben erhalten (notwendig für Äquivalenz von Inertialsystemen).

5. Richtungen senkrecht zum Boost

Um zu untersuchen, was mit Längen passiert, die nicht in Bewegungsrichtung der Systeme liegen, machen wir ein weiteres Gedankenexperiment. In Σ' steht ein Spiegel im Abstand $\frac{\Delta y'}{2}$ vom Ursprung auf der y' -Achse. Zu einem Zeitpunkt t'_1 wird ein Lichtstrahl am Ursprung erzeugt, der am Spiegel reflektiert wird und zu einer späteren Zeit t'_2 wieder am Ursprung ankommt. Dann gilt offensichtlich $c\Delta t' = \Delta y'$.

Im ungestrichenen Bezugssystem Σ betrachten wir die Ereignisse im Ursprung von Σ' . Die Zeit zwischen ihnen beträgt $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Aus Sicht eines Beobachters in Σ bewegt sich der Lichtstrahl nicht nur eine Strecke Δy in y -Richtung, sondern auch um die Strecke $v\Delta t$ in x -Richtung. Die Gesamtstrecke ist also

$$\begin{aligned} \sqrt{(\Delta y)^2 + v^2 \Delta t^2} &\stackrel{!}{=} c\Delta t \quad \text{wegen Postulat 2} \\ \implies c\Delta t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta y = \gamma \Delta y \end{aligned}$$

Zusammen mit der Zeitdilatation erhält man $\gamma \Delta y = c\Delta t = c\gamma \Delta t' = \gamma \Delta y'$, also $\Delta y = \Delta y'$. Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung sind somit nicht von der Lorentz-Transformation betroffen.

7 Spezielle Relativität

Mit dem letzten Effekt ist es nun möglich, die Transformation vektoriell zu verallgemeinern. Dafür sei $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$. Dann gilt

$$t' = \gamma(t - \vec{\beta} \cdot \vec{r}), \quad \vec{r}' = \vec{r} + \frac{\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{r})}{\beta^2}(\gamma - 1) - \vec{\beta}\gamma t$$

7.2.2 Poincaré-Transformation

Die allgemeine Transformation zwischen $(ct, \vec{r}) = \vec{x}$ und $(ct', \vec{r}') = \vec{x}'$ lautet

$$\vec{x}' = \Lambda \cdot \vec{x} + \vec{a}.$$

Dabei beschreibt der erste Summand eine homogene Lorentz-Transformation und der Zweite eine Translation in der Raumzeit. Für einen Boost in x -Richtung hat Λ die Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeinste homogene Lorentz-Transformation berücksichtigt eine mögliche räumliche Drehung der Koordinatensysteme (vgl. Kapitel 4)

$$\Lambda = A \cdot \Lambda_0 = \Lambda'_0 \cdot A, \quad A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \text{Drehmatrix} \end{array} \right)$$

7.3 Vierer-Notation

Abweichend von der Konvention im vorigen Kapitel schleppen wir hier (insbesondere im nächsten Abschnitt über Kräfte) doch wieder Faktoren c mit. Das ist weder konsistent noch logisch, aber in Anbetracht meiner Prüfung bei Herrn Frahm werde ich das genauso handhaben. An einigen Stellen werde ich beide Formulierungen angeben, um die Eleganz der natürlichen Einheiten zu betonen.

7.3.1 Der metrische Tensor

Wie bereits gesagt, lässt sich ein Ereignis in der Raumzeit durch vier Koordinaten $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ in einem Bezugssystem Σ angeben. Kurz schreibt man auch x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Man definiert durch

$$g = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

7 Spezielle Relativität

den *metrischen Tensor* (Minkowski-Metrik). Manchmal findet man auch die Definition mit anderem Vorzeichen, das macht keinen Unterschied. Durch g wird so etwas wie ein (nicht positiv definites) Skalarprodukt induziert. Für zwei Vektoren u, v in der Raumzeit kann man schreiben

$$u \cdot v = u^\alpha g_{\alpha\beta} v^\beta$$

insbesondere findet man für die kanonische Basis (e_0, e_1, e_2, e_3) der Raumzeit, dass

$$e_\alpha \cdot e_\beta = g_{\alpha\beta}$$

gilt. Das Skalarprodukt der Differenz zweier Ereignisse $\Delta x^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu$ ist

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{r})^2.$$

Dieses Skalarprodukt (der „Abstand“ zweier Ereignisse) ist lorentz-invariant. Dass bei Rotationen nichts passiert, ist klar, weil $(\Delta \vec{r})^2$ invariant unter Rotationen ist. Es genügt also, einen Boost in x -Richtung zu betrachten:

$$\begin{aligned} (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 &= \left[\gamma(\Delta x^{0'} + \beta \Delta x^{1'}) \right]^2 - \left[\gamma(\Delta x^{1'} + \beta \Delta x^{0'}) \right]^2 \\ &= (\Delta x^{0'})^2 - (\Delta x^{1'})^2 \end{aligned}$$

Für den Abstand gibt es drei Fälle, die zu unterscheiden sind.

1. $(\Delta s)^2 > 0$ („zeitartig“):
Es gibt ein Bezugssystem, in dem die Ereignisse am selben Ort mit einer Zeitdifferenz von $\sqrt{(\Delta s)^2}$ stattfinden.
2. $(\Delta s)^2 = 0$ („lichtartig“):
Die Ereignisse lassen sich durch einen Lichtstrahl verbinden.
3. $(\Delta s)^2 < 0$ („raumartig“):
Es gibt ein Bezugssystem, in dem die Ereignisse gleichzeitig an verschiedenen Orten stattfinden.

7.3.2 ko- und kontravariante Vierervektoren

Man definiert jetzt: Ein vierelementiger Vektor v^μ heißt (kontravarianter) *Vierervektor*, falls er bei Wechsel in ein anderes Inertialsystem durch die Lorentz-Transformation transformiert wird (wenn er also wie Ereignisse transformiert). Äquivalent dazu ist, dass das Skalarprodukt von v^μ mit einem Vierervektor u^μ lorentz-invariant ist.

Zu jedem Vierervektor v^α gibt es einen *kovarianten Vektor*

$$v_\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha$$

aus dem Dualraum der Raumzeit (eine Linearform auf der Raumzeit). Umgekehrt ist $v^\beta = g^{\alpha\beta} v_\alpha$ mit der inversen Metrik $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ (g ist selbstinvers). Damit lässt sich

7 Spezielle Relativität

das Skalarprodukt stets schreiben als $u \cdot v = u^\alpha v_\alpha = u_\alpha v^\alpha$. Es sollte daher ab sofort nur noch (Ausnahmen bestätigen die Regel!) über Indizes, die nicht auf gleicher Höhe stehen, summiert werden.

Die Bewegung eines Objektes ist eine eindimensionale Kurve

$$\mathcal{P} : \lambda \mapsto (x^0(\lambda), x^1(\lambda), x^2(\lambda), x^3(\lambda)) \quad (7.1)$$

in der Raumzeit. Im Fall nichtverschwindende Masse gibt es zu jedem Zeitpunkt ein Inertialsystem, in dem das Objekt ruht (der Abstand zum Raumzeitpunkt vor einer infinitesimalen Zeit dt ist zeitartig). Die Zeit in diesem Inertialsystem heißt *Eigenzeit* τ und wird zur Parametrisierung der Kurve (7.1) herangezogen. Gemäß der Zeitdilatation gilt $dt = \gamma d\tau$, darüber kann man die *Vierergeschwindigkeit*

Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(ct, \vec{r}) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

mit der räumlichen Geschwindigkeit \vec{v} definieren. Für den Betrag der Vierergeschwindigkeit gilt

$$u \cdot u = \gamma^2(c^2 - (\vec{v})^2) = c^2.$$

Das ist interessant: Jedes (massive) Teilchen bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit in der Raumzeit. Das gibt eine Interpretation der Zeitdilatation. Bewegt sich ein Teilchen in einer räumlichen Dimension, erhöht sich seine Geschwindigkeit entlang der Zeitachse (Raum und Zeit gehen mit entgegengesetztem Vorzeichen ein). Für das Teilchen vergeht die Zeit also langsamer.

Aus der Vierergeschwindigkeit kann man auch den *Viererimpuls* (auch *Energie-Impuls-Vektor*) gewinnen.

Viererimpuls

$$p^\mu = m u^\mu = (\gamma m c, \gamma m \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

mit der Energie $E = \gamma m c^2$ und dem relativistischen Impuls $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$. Aus $p \cdot p = m^2 c^2$ und $p \cdot p = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{p})^2$ folgt die *Energie-Impuls-Beziehung*

$$E^2 = m^2 c^4 + (\vec{p})^2 c^2.$$

In natürlichen Einheiten sieht einerseits die Äquivalenz von Energie und Masse viel einleuchtender aus ($E = \gamma m$ bzw. nichtrelativistisch sogar $E = m$), andererseits vereinfacht sich auch die Energie-Impuls-Beziehung zu $E^2 = m^2 + (\vec{p})^2$.

Fasst man die kinetische Energie als Differenz von Gesamtenergie und Ruheenergie auf, so folgt für die *relativistische kinetische Energie*

$$T = E - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2$$

Kurzer Test: Für $v \ll c$ ist $T = \frac{1}{2} m v^2 + \mathcal{O}(\beta^4)$, man erhält also den nichtrelativistischen Fall.

7 Spezielle Relativität

Für $\partial^\mu = (\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ und den gewöhnlichen Ereignis-Vierervektor x^μ gilt Vierergradient

$$\partial \cdot x = \frac{\partial ct}{\partial ct} + \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 4$$

in jedem Inertialsystem. Nach Definition ist ∂^μ also ein Vierervektor (der *Vierergradient*).

Nach dem ersten Postulat muss die Kontinuitätsgleichung in jedem Inertialsystem gelten. Viererstromdichte

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \partial \cdot j = 0$$

mit der *Viererstromdichte* $j^\mu = (c \cdot \rho, \vec{j})$.

Auch die Lorenzgleichung für elektromagnetische Potentiale muss in jedem Inertialsystem gelten. Viererpotential

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \partial \cdot A = 0$$

mit dem *Viererpotential* $A^\mu = (\frac{\Phi}{c}, \vec{A})$.

7.4 Kräfte, kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

Die Newtonsche Formulierung der Mechanik galt in Systemen mit $v \ll c$. Natürlich möchte man auch unter der Annahme der zwei Postulate mechanische Probleme lösen können. Wir suchen deshalb eine kovariante Form des Kraftgesetzes

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Als Voraussetzung nehmen wir an, dass die Maxwellgleichungen die elektromagnetische Theorie korrekt beschreiben. Wir versuchen deshalb zunächst, die Maxwellgleichungen kovariant zu formulieren. Die Wellengleichungen für elektromagnetische Potentiale lauten

$$\begin{aligned} \square \vec{A} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \cdot \vec{j} \\ \square \Phi &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - \nabla^2 \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{aligned}$$

bzw. mit den definierten Vierervektoren aus dem vorigen Abschnitt und $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$

$$\square A^\mu = (\partial_\nu \partial^\nu) A^\mu = \mu_0 \cdot j^\mu$$

7 Spezielle Relativität

Die Lorentz-Kraft kann man mit den Potentialen Φ, \vec{A} wie folgt formulieren.

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\
 &= q \left[\left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right] \\
 &= q \left[-\nabla\Phi + \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \right] \\
 &= q \left[-\nabla(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \vec{p}
 \end{aligned}$$

Eine „naheliegende“ kovariante Verallgemeinerung des Kraftgesetzes kann durch den Ansatz

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} p^\mu &= q \left[\partial^\mu (u \cdot A) - \frac{d}{d\tau} A^\mu \right] \\
 &= q \left[\partial^\mu A^\nu u_\nu - \partial^\nu A^\mu \frac{dx_\nu}{d\tau} \right] \\
 &= q F^{\mu\nu} u_\nu
 \end{aligned}$$

mit dem *Feldstärketensor* $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ gegeben sein. Durch Nachrechnen findet man

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & +B_y \\ \frac{E_y}{c} & +B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & +B_y \\ -\frac{E_y}{c} & +B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Definition erlaubt es uns, die homogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

in kovarianter und symmetrischer Form zu schreiben

$$\boxed{\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0}.$$

Anmerkung: Setzt man in diese Gleichung die Definition von $F_{\mu\nu}$ aus dem Viererpotential wieder ein, erhält man eine wahre Aussage. Das liegt darin begründet, dass die Potentiale für die elektromagnetischen Felder bereits die homogenen Maxwellgleichungen erfüllen (man hat sie genau genommen daraus gewonnen).

7 Spezielle Relativität

Die inhomogenen Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

gehen über in

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu} \quad (7.2)$$

Die kovariante Form des Kraftgesetzes lautet

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \quad (7.3)$$

wobei K^μ die Viererkraft (*Minkowski-Kraft*) ist. Die räumlichen Komponenten \vec{K} stimmen bis auf einen Faktor γ mit der gewöhnlichen Kraft überein.

$$\vec{F} = \frac{1}{\gamma} \vec{K} = \sqrt{1 - \beta^2} \vec{K}$$

7.5 Streuung relativistisch

~~Nicht so interessantes~~ Total spannendes Kapitel über relativistische Streu- beziehungsweise Zerfallsexperimente (CERN etc.).

7.6 Lagrange-Formalismus

Um das Wirkungsprinzip auch relativistisch anwenden zu können, benötigt man eine Darstellung der Wirkung S . Wir wollen annehmen, dass S ein Lorentz-Skalar ist, damit der physikalische Pfad eines Teilchen für Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen gleich ist.

7.6.1 Freies Teilchen

Da die Eigenzeit τ eines Teilchens eine lorentzinvariante Größe ist, lohnt sich der Versuch,

$$S = \lambda \int_A^B d\tau$$

als Wirkung zu probieren. Dabei sind A, B zwei Punkte in der Raumzeit und λ eine Konstante, die wir später so wählen, dass die Theorie mit dem nichtrelativistischen Grenzfall übereinstimmt.

Dieser Versuch sagt im Grunde, dass sich ein freies Teilchen so bewegt, dass im Ruhesystem möglichst wenig Zeit vergeht. Das ist eine Theorie, die zumindest für Lichtausbreitung auch experimentell bestätigt ist.

7 Spezielle Relativität

Befindet sich ein Beobachter in einem gegebenen Inertialsystem Σ , so gilt dort $dt = \gamma d\tau$ und damit

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &= \lambda \delta \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{\gamma} \\ &= \lambda \delta \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \beta^2} \stackrel{!}{=} \delta \int_{t_A}^{t_B} dt \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) \end{aligned}$$

Geht man mit $\beta \ll 1$ zum nichtrelativistischen Grenzfall über, so findet man

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \beta^2} &= 1 - \frac{\beta^2}{2} + \mathcal{O}(\beta^4) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\beta^2 + \text{const} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}mv^2 \\ &\Rightarrow \boxed{\lambda = -mc^2} \end{aligned}$$

Demzufolge ist die Lagrange-Funktion für ein relativistisches freies Teilchen

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Der kanonisch konjugierte Impuls war im nichtrelativistischen Fall gleich dem mechanischen Impuls. Tatsächlich gilt jetzt auch

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m \vec{v}$$

der kanonische Impuls ist also jetzt der relativistische Impuls. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = 0$$

also sind Impuls wie Geschwindigkeit für ein freies Teilchen konstant.

Die Hamiltonfunktion berechnet sich durch $H = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L}$ und wenn man mal wieder munter Differentiale kürzt, erhält man

$$-dS = -\mathcal{L}dt = Hdt - \vec{p}d\vec{x} = \left(\frac{H}{c}, \vec{p}\right) \cdot (cdt, d\vec{x})$$

Deshalb ist $\left(\frac{H}{c}, \vec{p}\right)$ ein Vierervektor und es gilt $\boxed{H = E}$ (das erhält man auch, wenn man die Hamiltonfunktion einmal explizit ausschreibt).

7.6.2 Teilchen in konservativem Kraftfeld

Weil das im ersten Teil schon so gut geklappt hat, versuchen wir doch einfach, die Lagrangefunktion etwas zu modifizieren.

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(\vec{x})$$

7 Spezielle Relativität

Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} = \vec{F}$$

und stimmt mit (7.3) überein.

7.6.3 Beispiel: relativistischer harmonischer Oszillator

Wir betrachten das übliche Federpotential $V(x) = \frac{k}{2}x^2$, das symmetrisch ist und die Ruhelage bei $x = 0$ festlegt. Der Lagrangian lautet

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - \frac{k}{2}x^2$$

und da er nicht explizit zeitabhängig ist, ist die Energie

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \gamma mc^2 + V(x) = \text{const}$$

erhalten. Aus der Energieerhaltung kann man eine Bewegungsgleichung ableiten.

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + V(x) \\ \Rightarrow \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= E - V \\ 1 - \frac{v^2}{c^2} &= \frac{m^2 c^4}{(E - V)^2} \\ \frac{v^2}{c^2} &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 1 - \frac{m^2 c^4}{(E - V)^2} \\ \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(E - V)^2}} \end{aligned}$$

Wir erwarten eine Oszillation um $x = 0$ mit einer Amplitude b . Dabei gilt $V(\pm b) = E - mc^2$, also wegen der Energieerhaltung $E = mc^2 + \frac{k}{2}b^2$. Weiterhin ist deshalb

$$\frac{E - V}{mc^2} = 1 + \frac{k}{2mc^2}b^2 - \frac{k}{2mc^2}x^2 = 1 + \kappa(b^2 - x^2)$$

mit $\kappa = \frac{k}{2mc^2}$. Ist T die Periodendauer der Bewegung, so gilt (bei entsprechenden

7 Spezielle Relativität

Anfangsbedingungen)

$$\begin{aligned}
 \frac{T}{4} &= \int_0^{\frac{T}{4}} dt \quad (\text{Substitution } t \rightarrow x(t)) \\
 &= \frac{1}{c} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(E-V)^2}}} \\
 &= \frac{1}{c} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+\kappa(b^2-x^2))^2}}} \\
 &= \frac{1}{c} \int_0^b dx \frac{1 + \kappa(b^2 - x^2)}{\sqrt{\kappa(b^2 - x^2)(2 + \kappa(b^2 - x^2))}}
 \end{aligned}$$

mit der Näherung, dass die potentielle Energie klein gegen mc^2 ist ($\kappa b^2 \ll 1$):

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{c} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{2\kappa(b^2 - x^2)}} \left(1 - \frac{3\kappa}{4}(b^2 - x^2) + \dots \right) \\
 &\approx \frac{\pi}{2c} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \left(1 + \frac{3}{8}\kappa b^2 \right) \\
 \implies T &= 2\pi \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k}}}_{= \tau_0 \text{ (nichtrel. harm. Oszillator)}} \left(1 + \frac{3}{16} \frac{\kappa b^2}{mc^2} \right)
 \end{aligned}$$

Die Näherung könnte eine Laurent-Reihe sein (Bronstein?), das Integral erhält man mit der Substitution $x = b \sin \varphi$.

Das Ergebnis ist interessant: Obwohl wir ein quadratisches Potential angenommen haben, hängt die Periodendauer von der Energie (bzw. der Amplitude) ab. Das liegt darin begründet, dass mit zunehmender Energie die Geschwindigkeit im Potentialminimum immer größer wird, so dass die relativistische Effekte stärker werden.

8 Relativistische Elektrodynamik

Bei der Beschäftigung mit der kovarianten Formulierung der Maxwellgleichungen haben wir bereits für einige Größen eine Darstellung, die ein wohldefiniertes Verhalten unter Lorentz-Transformationen zeigt, gefunden.

- Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

- Wellengleichung für elektromagnetische Potentiale in Lorenz-Eichung

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{mit} \quad \square = \partial_\nu \partial^\nu, \quad A^\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A} \right)$$

- Lorentz-Kraft für geladene Teilchen

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} u_\nu$$

mit

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & +B_y \\ \frac{E_y}{c} & +B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- und schließlich die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu \end{aligned}$$

8.1 Transformation elektromagnetischer Felder

Der Feldstärketensor transformiert bei Wechsel in ein anderes Inertialsystem gemäß der Lorentz-Transformation

$$F^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} F^{\mu\nu} = (\Lambda \cdot F \cdot \Lambda^t)^{\mu'\nu'}$$

Für einen Boost in x -Richtung ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} =: \left(\frac{\Lambda_2}{\mathbb{1}_2} \right)$$

und den Feldstärketensor kann man mit Blockmatrizen schreiben als

$$F = \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_x}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ -B_z & +B_y \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \frac{E_y}{c} & +B_z \\ \frac{E_z}{c} & -B_y \end{pmatrix} & B_x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow F' = \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_x}{c} \Lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_2^t & \Lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ -B_z & +B_y \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \frac{E_y}{c} & +B_z \\ \frac{E_z}{c} & -B_y \end{pmatrix} \Lambda_2 & B_x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Dabei ist

$$\Lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_2^t = \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 & -(1-\beta^2) \\ 1-\beta^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es gilt also

$$\boxed{E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x}$$

Für die anderen Richtungen der Felder findet man die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \frac{E'_y}{c} & \frac{E'_z}{c} \\ B'_z & -B'_y \end{pmatrix} = \Lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ B_z & -B_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma(E_y - c\beta B_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + c\beta B_y) \\ B'_y &= \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right) \\ B'_z &= \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right) \end{aligned} \tag{8.1}$$

Verallgemeinert man das auf einen beliebigen Boost in Richtung $\hat{n} = \frac{\vec{v}}{v}$, erhält man die Transformationsgleichungen für elektromagnetische Felder

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + c\beta\hat{n} \times \vec{B}) \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{\beta}{c}\hat{n} \times \vec{E}) \end{aligned}} \tag{8.2}$$

8.1.1 Feld einer bewegten Punktladung

Eine elektrische Ladung q befinde sich im Inertialsystem Σ' am Ursprung in Ruhe. Wie üblich bewege sich Σ' relativ zu Σ mit Geschwindigkeit v in positive x -Richtung.

8 Relativistische Elektrodynamik

Wir wollen die elektromagnetischen Felder an einer Position $P(x = 0, y = b, z = 0)$, also im Abstand b vom Ursprung, beobachten.

Die Koordinaten von P in Σ' sind $x'_1 = -vt', x'_2 = b, x'_3 = 0$ und der räumliche Abstand zwischen Beobachter und Ladung ist $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$. Außerdem gilt für P

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = \gamma t$$

In Sigma kennen wir auch die Größe der Felder am Ort P des Beobachters

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r')^3} \begin{pmatrix} -vt' \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\gamma vt \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}' = 0$$

Nach (8.1) bzw. (8.2) erhält man für die Felder, die der Beobachter misst

$$E_x = E'_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{3/2}}$$

$$E_y = E_z = \gamma E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{(b^2 + (\gamma vt)^2)^{3/2}}$$

$$B_x = B'_x = 0$$

$$B_y = B_z = \frac{\gamma\beta}{c} E'_y = \frac{\beta}{c} E_y$$

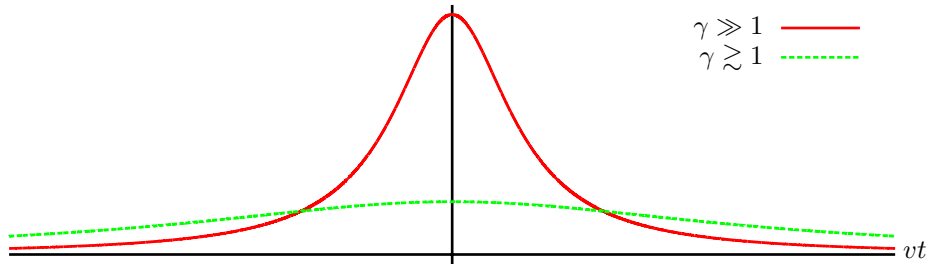


Abbildung 8.1: qualitativer Plot des zeitlichen Verlaufes der transversalen Felder

Für den nichtrelativistischen Grenzfall gilt $\gamma \approx 1$ und man findet

$$B_z \approx \frac{\beta}{c} E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \right)_z$$

und das stimmt mit dem bekannten Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

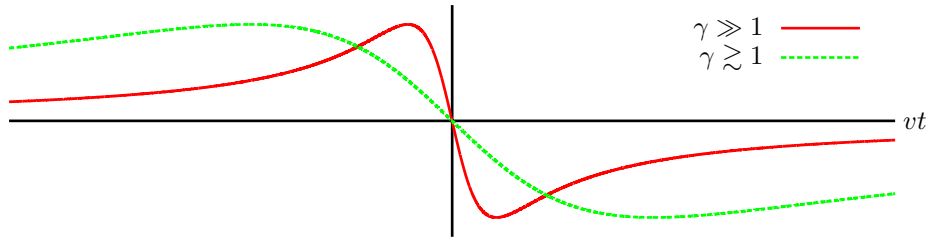


Abbildung 8.2: qualitativer Plot des zeitlichen Verlaufes des longitudinalen E-Feldes

überein.

In den Abbildungen sind die transversalen Felder (senkrecht zur Bewegungsrichtung) und die longitudinalen Felder (parallel) qualitativ aufgetragen. Die Maxima der transversalen Felder sind proportional zu γ , während die Breite der Peaks (bzw. im zweiten Fall der Abstand der Maxima) proportional zu $\frac{1}{\gamma}$ sind.

8.2 Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld

Um die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen mit der Lagrange-Mechanik beschreiben zu können, greifen wir auf die Ergebnisse aus Kapitel 2.4 zurück. Wir betrachten die elektromagnetischen Felder (gegeben durch A^μ) als generalisierte Koordinaten und die Raumzeitkoordinaten x^μ als unabhängige Variablen. Das hatten wir in ähnlicher Weise bereits bei der schwingenden Seite getan (da nur mit der Zeit und einer Raumdimension). Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten dann

$$\partial^\alpha \frac{\partial L}{\partial (\partial^\alpha A^\beta)} = \frac{\partial L}{\partial A^\beta}, \quad \beta = 0, 1, 2, 3$$

Das Wirkungsintegral geht über in

$$S = \int dt d^3x L$$

und weil das Volumenelement $dt d^3x$ Lorentz-invariant ist, ist es naheliegend, dass auch die Lagrange-Dichte L ein Lorentz-Skalar sein muss. Das führt zu dem Versuch, die Lagrange-Dichte quadratisch in den „generalisierten Geschwindigkeiten“ $\partial^\mu A^\nu$ anzusetzen.

$$\begin{aligned} L_{\text{em}}^{(0)} &= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \end{aligned}$$

8 Relativistische Elektrodynamik

Damit und mit $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ kann man die Ableitung $\frac{\partial L_{\text{em}}^{(0)}}{\partial(\partial^\alpha A^\beta)}$ ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\text{em}}^{(0)}}{\partial(\partial^\alpha A^\beta)} &= -\frac{1}{4\mu_0} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \left\{ (\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho) F^{\mu\nu} + (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu) F^{\rho\sigma} \right\} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} F_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichungen erhält man

$$\boxed{-\frac{1}{\mu_0} \partial^\alpha F_{\alpha\beta} = 0}$$

also die inhomogenen Maxwellgleichungen (7.2), aber ohne Inhomogenität (also ohne äußere Quellen). In der Lagrange-Dichte fehlt also noch die Wechselwirkung mit der Viererstromdichte j^μ . Durch einen zusätzlichen Term $L_{\text{int}} = -j_\mu A^\mu$ erhalten wir

$$\boxed{L_{\text{em}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu.}$$

Dann liefern die Euler-Lagrange-Gleichungen die vollständigen inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu.$$

Man erhält nicht die homogenen Maxwellgleichungen, die waren aber mit der Wahl von $F^{\mu\nu}$ ohnehin erfüllt. Aus dieser Lagrange-Dichte kann man noch einige Dinge herleiten:

- Die Kontinuitätsgleichung folgt aus der inhomogenen Maxwellgleichung durch Differenzieren und Aufsummieren

$$\mu_0 \partial^\nu j_\nu = \partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

weil $\partial^\nu \partial^\mu$ symmetrisch und $F_{\mu\nu}$ antisymmetrisch in μ, ν ist.

- Aus der Darstellung von $F_{\mu\nu}$ mit elektrischem und magnetischem Feld kann man den quellfreien Term der Lagrangedichte schreiben als

$$L_{\text{em}}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right)$$

- Weiterhin kann man die Eichinvarianz der Wirkung zeigen. Die elektromagnetische Felder sind invariant unter einer Eichung

$$\Phi \rightarrow \Phi - \dot{\chi}, \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\chi \quad \text{bzw.} \quad A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi$$

Der Feldstärketensor ist tatsächlich invariant.

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu} - (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \chi = F^{\mu\nu}$$

Und deshalb geht die Wirkung über in

$$S \rightarrow S + \underbrace{\int d^4x j_\mu \partial^\mu \chi}_{=0 \text{ (part. Int.)}} = S$$

wobei bei der partiellen Integration die Kontinuitätsgleichung (und ??) genutzt wurde. Die Wirkung ist also (im Gegensatz zur Lagrange-Dichte) eichinvariant.

8.2.1 Lagrange-Funktion für Punktmechanik und elektromagnetische Felder

Zusammengefasst lässt sich jetzt eine Lagrange-Funktion aufstellen, die Punktmechanik, freie elektromagnetische Felder und die Wechselwirkung von Materie mit Feldern beinhaltet.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_i \left(-m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} \right) \quad \leftarrow \text{freie Massenpunkte} \\ & + \int d^4x \left(\frac{-1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad \leftarrow \text{freie Felder (ohne Quellen)} \\ & + \int d^4x (-j_\mu A^\mu) \quad \leftarrow \text{Kopplung zwischen Materie und Feldern} \end{aligned}$$

Später (in der relativistischen Quantenfeldtheorie) wird es auch eine eichinvariante Lagrangedichte für Materie und elektromagnetische Felder geben.

8.3 Energie und Impuls

Um wie in der Punktmechanik eine Hamiltonfunktion angeben zu können, betrachten wir die Lagrangedichte L wie im vorigen Abschnitt. Sie sei eine Funktion verschiedener Felder Φ_k und ihrer zeitlichen und örtlichen Änderung $\partial_\mu \Phi_k$. Man definiert die *Hamilton-Dichte*

$$\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_k} \cdot \dot{\Phi}_k - L$$

und damit die Hamiltonfunktion

$$H = \int d^3x \mathcal{H}.$$

Dabei ist die Hamiltondichte offenbar nicht Lorentz-invariant, weil sie zwei Zeitableitungen enthält. Allerdings ist \mathcal{H} die Zeit-Zeit-Komponente (also $\mu = \nu = 0$) des *kanonischen Energie-Impuls-Tensors*

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \partial^\nu \Phi_k - g^{\mu\nu} L$$

8 Relativistische Elektrodynamik

In der Punktmechanik galt die Beziehung $\frac{dH}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$. In der Feldtheorie ist $T^{\mu\nu}$ eine „verallgemeinerte Energiedichte“ und der Energiesatz lässt sich kovariant verallgemeinern.

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \cdot \partial^\nu \Phi_k \right) - \partial^\nu L \\ &= \underbrace{\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \right)}_{= \frac{\partial L}{\partial \Phi_k} \text{ (E-L-Gln.)}} \cdot \partial^\nu \Phi_k + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \cdot \partial_\mu \partial^\nu \Phi_k - \partial^\nu L \\ &= \frac{\partial L}{\partial \Phi_k} \cdot \partial^\nu \Phi_k + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \cdot \partial^\nu \partial_\mu \Phi_k - \partial^\nu L \\ &= \partial^\nu (L(\Phi_k, \partial^\mu \Phi_k)) - \partial^\nu L = 0 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass L nicht explizit von den Raumzeit-Koordinaten abhängt. Man erhält insgesamt also die kurze Formel

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0} \tag{8.4}$$

Daraus folgt, dass auch das Integral

$$\int d^3x \partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_0 \int d^3x T^{0\nu} + \sum_{i=1}^3 \int d^3x \partial^i T^{i\nu}$$

verschwindet. Für endliche Felder ist aber das zweite Integral identisch Null (Oberflächenintegral im Unendlichen), so dass man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int d^3x T^{00} &= 0 && \text{(Energieerhaltung)} \\ \frac{d}{dt} \int d^3x T^{0i} &= 0 && \text{(Impulserhaltung)} \end{aligned}$$

findet.

8.3.1 Freies elektromagnetisches Feld

Wir setzen für die Lagrangedichte wie im vorigen Abschnitt

$$L_{\text{em}}^{(0)} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

an. Dann berechnet sich der Energie-Impuls-Tensor zu

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial L_{\text{em}}^{(0)}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} \cdot \partial^\nu A^\lambda - g^{\mu\nu} L_{\text{em}}^{(0)} \\ &\stackrel{(8.3)}{=} -\frac{1}{\mu_0} g^{\mu\kappa} F_{\kappa\lambda} \cdot \partial^\nu A^\lambda - g^{\mu\nu} L_{\text{em}}^{(0)} \end{aligned}$$

8 Relativistische Elektrodynamik

Das ist allerdings keine schöne Darstellung, weil sie keine Symmetrie unter Vertauschung von μ und ν erkennen lässt. Mit der Identität $\partial^\nu A^\lambda = -F^{\lambda\nu} + \partial^\lambda A^\nu$ kann man die Gleichung weiter umschreiben.

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\left(g^{\mu\kappa} F_{\kappa\lambda} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right)}_{\text{symmetrisch und eichinvariant}} - \frac{1}{\mu_0} g^{\mu\kappa} F_{\kappa\lambda} \partial^\lambda A^\nu$$

Der nichtsymmetrische Rest

$$\begin{aligned} T_D^{\mu\nu} &:= - \frac{1}{\mu_0} g^{\mu\kappa} F_{\kappa\lambda} \partial^\lambda A^\nu = \frac{1}{\mu_0} F^{\lambda\mu} \partial_\lambda A^\nu \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\lambda\mu} \partial_\lambda A^\nu + \underbrace{(\partial_\lambda F^{\lambda\mu})}_{=0 \text{ (Maxwell im Vakuum)}} A^\nu \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\lambda (F^{\lambda\mu} A^\nu) \end{aligned}$$

trägt nicht zu (8.4) bei:

$$\partial_\mu T_D^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\partial_\mu \partial_\lambda}_{\text{symm.}} \underbrace{(F^{\lambda\mu} A^\nu)}_{\text{anti-symm.}} = 0$$

Deshalb gilt für den *symmetrischen Energie-Impuls-Tensor*

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu} - T_D^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(g^{\mu\kappa} F_{\kappa\lambda} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right) \end{aligned}}$$

ebenso

$$\boxed{\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0} \tag{8.5}$$

Er ist symmetrisch und spurfrei

$$\text{Spur}\Theta = \Theta^\mu{}_\mu = 0$$

und als Funktion von E - und B -Feld ausgedrückt findet man

- In der Zeit-Zeit-Komponente die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\Theta^{00} = \Theta_{00} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 =: u$$

- In den Zeit-Raum- bzw. Raum-Zeit-Komponenten die Energie-Stromdichte (*Poynting-Vektor*)

$$\Theta^{0i} = \Theta^{i0} = -\Theta_{0i} = -\Theta_{i0} = \frac{1}{c\mu_0} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)_i = \frac{1}{c} (\vec{S})_i$$

- In den räumlichen Komponenten Θ^{ij} den Maxwell'schen Spannungstensor ($\hat{=}$ Impuls-Stromdichte des elektromagnetischen Feldes).

Mit (8.5) hat man auch den Poyntingschen Satz:

$$0 = \partial_\mu \Theta^{\mu 0} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} \right)$$

8.3.2 Erhaltungssätze bei äußeren Quellen

Bei der Symmetrisierung des Energie-Impuls-Tensors haben wir die Maxwellgleichungen im Vakuum benutzt. Für nichtverschwindende Stromdichten j_μ verschwindet die Divergenz von Θ nicht mehr, es gilt

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\lambda} j_\lambda &= \frac{1}{\mu_0} \left(\partial^\mu F_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \partial^\nu (F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}) \right) + F^{\nu\lambda} j_\lambda \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(\underbrace{(\partial^\mu F_{\mu\lambda})}_{=\mu_0 j_\lambda} F^{\lambda\nu} + F_{\mu\lambda} \partial^\mu F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\lambda} \partial^\nu F^{\mu\lambda} \right) + F^{\nu\lambda} j_\lambda \\ &= \frac{1}{2\mu_0} F_{\mu\lambda} \left(\partial^\mu F^{\lambda\nu} + \underbrace{\partial^\nu F^{\lambda\mu}}_{=-\partial^\lambda F^{\nu\mu}} \right) \quad (\text{Jacobi-Identität}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} F_{\mu\lambda} \underbrace{(\partial^\mu F^{\lambda\nu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu})}_{\text{symm. unter } \mu \leftrightarrow \lambda} = 0 \end{aligned}$$

also

$$\boxed{\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = F^{\lambda\nu} j_\lambda}$$

In der Zeit-Komponente steht der (jetzt vollständige) Poyntingsche Satz

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} \right) = -\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}$$

und in den räumlichen Komponenten findet man die *Lorentz-Kraftdichte*

$$F^{i\lambda} j_\lambda = \left(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \right)_i$$

8.4 Lösung der kovarianten Wellengleichung

In der Lorenzzeichnung lautet die kovariante Wellengleichung

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

und wird mit einer *Greenschen Funktion* $G(x, x')$ gelöst (anschauliche Erklärung zu Greenschen Funktionen bei [Wikipedia](#)).

$$\square G(z) = \delta^{(4)}(z), \quad \delta^{(4)}(z) := \delta(z_0) \delta^{(3)}(\vec{z})$$

8 Relativistische Elektrodynamik

Um eine Darstellung von G zu gewinnen, betrachtet man die Fourier-Transformation

$$G(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{G}(k) e^{-ik \cdot z}, \quad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

Einsetzen in die linke Seite der Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} \square_z G(z) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{G}(k) \left(\frac{\partial}{\partial z^\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z_\mu} \cdot e^{-ik^\mu z_\mu} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{G}(k) \left(\frac{\partial}{\partial z^\mu} (-ik^\mu) e^{-ik^\mu z^\mu} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{G}(k) (-k \cdot k) e^{-ik \cdot z} \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann man mit der Fourier-Darstellung der δ -Distribution ausdrücken.

$$\delta^{(4)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot z}$$

Durch Vergleich erhält man

$$\tilde{G}(k) (-k \cdot k) = 1$$

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{k \cdot k} \implies G(z) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot z}}{k \cdot k}$$

Weil das Skalarprodukt nicht positiv definit ist, ist der Integrand singular. Deutlicher wird das, wenn man die Greensche Funktion mit der Definition $\kappa := |\vec{k}|$ umschreibt.

$$G(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2}$$

Das innere Integral hat offenbar einfache Pole bei $k_0 = \pm\kappa$. Dieses Problem können wir mit dem Cauchyschen Integralsatz umgehen. Im Wesentlichen benötigen wir zwei Aussagen über Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D analytisch sind:

1. Das Integral über jede geschlossene Kurve in D verschwindet.
2. Schließt die geschlossene Kurve $\mathcal{C} \subset D$ den Punkt z ein, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} d\xi \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

Für mehr Informationen und insbesondere den Beweis dieser Aussagen verweise ich auf die Vorlesung Funktionentheorie, in der das erläutert werden sollte. Wichtig ist lediglich noch, dass die Exponentialfunktion auf ganz \mathbb{C} und $\frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{-\kappa, \kappa\}$ analytisch ist.

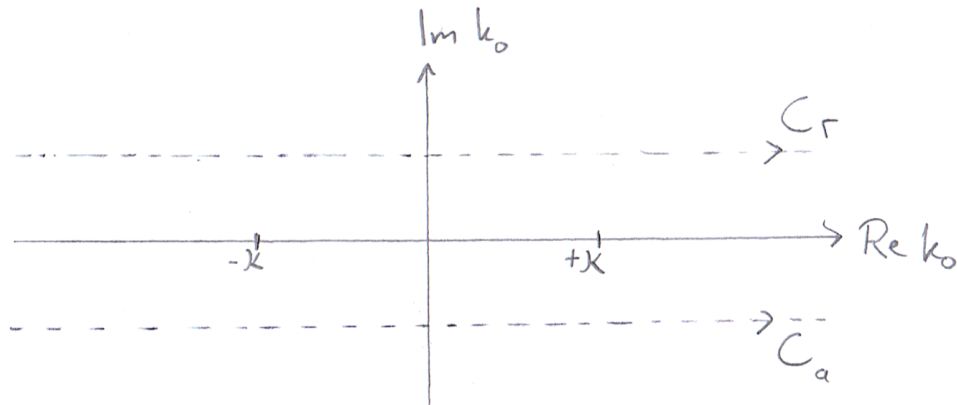


Abbildung 8.3: Idee: Verschiebe den Integrationsweg in der komplexen Ebene, so dass der Integrand nicht singulär wird

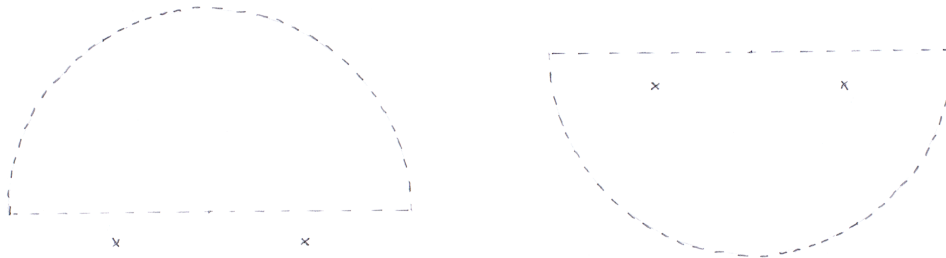


Abbildung 8.4: Um eine geschlossene Kurve zu erhalten, kann man im positiv-unendlichen oder im negativ-unendlichen einen Halbkreis bilden.

Die Idee, die jetzt angewandt wird, ist in Abbildung 8.3 dargestellt. Statt k_0 nur als reelle Variable aufzufassen, weichen wir in der komplexen Zahlenebene ein kleines Stück in den Imaginärteil aus. Wir werden gleich sehen, dass die Größe dieser Abweichung von der reellen Achse keine Rolle spielt. Um den Integralsatz anwenden zu können, benötigt man eine geschlossene Kurve. Diese erhalten wir, wenn man im Unendlichen einen Halbkreis hinzufügt (Abbildung 8.4). Da sich natürlich der Wert des Integrals nicht ändern soll, muss man das Vorzeichen von z_0 beachten:

$z_0 > 0$: $e^{-ik_0 z_0}$ ist in der oberen Halbebene unbeschränkt, in der unteren Halbebene können wir die Kontur schließen

$z_0 < 0$: entsprechend andersherum

Je nachdem, welchen der Integrationswege C_r, C_a man wählt, liegen also die Polstellen innerhalb oder außerhalb der Kurve.

8 Relativistische Elektrodynamik

Für den Integrationsweg C_r wie in Abbildung 8.4 rechnen wir das konkret aus.

$$\boxed{z_0 < 0}$$

Die Polstellen sind nicht eingeschlossen, deshalb ist $\frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2}$ analytisch und das Integral

$$\oint_{C_r} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2} = 0$$

verschwindet.

$$\boxed{z_0 > 0}$$

Die Polstellen sind eingeschlossen, also gilt

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2} &= \frac{1}{2\kappa} \oint_{C_r} dk_0 e^{-ik_0 z_0} \left(\frac{1}{k_0 - \kappa} - \frac{1}{k_0 + \kappa} \right) \\ &= \frac{\pi i}{\kappa} (e^{-i\kappa z_0} - e^{+i\kappa z_0}) = \frac{2\pi i}{\kappa} \sin \kappa z_0 \end{aligned}$$

Damit kann man die *retardierte Greenfunktion* G_r ausrechnen:

$$\begin{aligned} G_r(z) &= \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}} \frac{\sin \kappa z_0}{\kappa} \\ &= \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\alpha \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^2 \sin \alpha}{\kappa} e^{i\kappa R \cos \alpha} \sin \kappa z_0, \quad R := |\vec{z}| \\ &= \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\kappa \kappa \sin(\kappa z_0) \underbrace{\int_0^\pi d\alpha \sin(\alpha) e^{i\kappa R \cos \alpha}}_{= \frac{2}{\kappa R} \sin \kappa R} \\ &= \frac{\Theta(z_0)}{2\pi^2 R} \int_0^\infty d\kappa \sin \kappa R \sin \kappa z_0 \\ &= \frac{\Theta(z_0)}{2\pi^2 R} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\kappa \frac{1}{2} [\cos \kappa(z_0 - R) - \cos \kappa(z_0 + R)] \\ &= \frac{\Theta(z_0)}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^\infty d\kappa (e^{i(z_0 - R)\kappa} - e^{i(z_0 + R)\kappa}) \\ &= \frac{\Theta(z_0)}{4\pi R} \left(\delta(z_0 - R) - \underbrace{\delta(z_0 + R)}_{=0 \text{ (wg. } z_0 > 0)} \right) = \frac{\Theta(z_0)}{4\pi R} \delta(z_0 - R) \end{aligned}$$

8 Relativistische Elektrodynamik

Ebenso berechnet sich für den zweiten Integrationspfad C_a die *avancierte Greensfunktion*

$$G_a(z) = \frac{\Theta(-z_0)}{4\pi R} \delta(z_0 + R)$$

Durch das Heaviside-Theta enthalten die beiden Funktionen nur Anteile für positive bzw. negative Zeiten. Wenn man die Inhomogenität als eine Ursache der Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ betrachtet, beschreibt also die retardierte Greensfunktion den kausalen Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung. Die avancierte Greensfunktion hat in diesem Sinne keine physikalische Bedeutung, weil ein Ereignis nicht rückwärts in der Zeit wirken kann. Man kann sie aber benutzen, um von einer Wirkung auf die Ursache zu schließen (also den umgekehrten Weg).

Benutzt man die Eigenschaft der Delta-Distribution

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{f'(x_i)}$$

wobei x_i die Nullstellen von f sind, so gilt

$$\delta(z^2) = \delta(z_0^2 - R^2) = \delta((z_0 - R)(z_0 + R)) = \frac{1}{2R} (\delta(z_0 - R) + \delta(z_0 + R))$$

und man kann die gefundenen Greenschen Funktionen umformulieren zu

$$\boxed{\begin{aligned} G_r(z) &= \frac{1}{2\pi} \Theta(z_0) \delta(z^2) \\ G_a(z) &= \frac{1}{2\pi} \Theta(-z_0) \delta(z^2) \end{aligned}}$$

Die Lösung der Wellengleichung, die unser eigentliches Ziel war, erhält man nun durch Faltung der Greenschen Funktionen mit der Inhomogenität (und Addition einer Lösung der homogenen Wellengleichung).

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= A_{\text{in}}^\mu(x) + \mu_0 \int d^4x' G_r(x - x') j^\mu(x') \\ A^\mu(x) &= A_{\text{out}}^\mu(x) + \mu_0 \int d^4x' G_a(x - x') j^\mu(x') \end{aligned} \tag{8.6}$$

Sei j^μ in der Raumzeit lokalisiert. Dann verschwindet für $x_0 \rightarrow -\infty$ (also im Anbeginn der Zeit) das Integral in (8.6), so dass die Interpretation von A_{in} als *einlaufendes Potential* (das durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist) gerechtfertigt ist. Analog ist A_{out} das *auslaufende Potential* für $x_0 \rightarrow \infty$. Die Differenz zwischen beiden

$$A_{\text{out}}^\mu - A_{\text{in}}^\mu = \mu_0 \int d^4x' (G_r(x - x') - G_a(x - x')) j^\mu(x') =: A_{\text{rad}}^\mu(x)$$

ist das Potential von Strahlungsfeldern.

9 Strahlung

In diesem Kapitel geht es darum, dass zeitveränderliche Quellen (Ladungen) Strahlung (elektromagnetische Wellen) aussenden. Das schenke ich mir vorerst. Das ist hoffentlich (!!!) nicht prüfungsrelevant – Mut zur Lücke!

9.1 Liénard-Wiechert-Potentiale

9.2 Strahlungsfelder beschleunigter Ladungen