



Leibniz  
Universität  
Hannover

---

# DIE POINCARÉ-SYMMETRISCHE SAITE

---

## Masterarbeit

Institut für Theoretische Physik  
Fakultät für Mathematik und Physik  
Leibniz Universität Hannover

**Autor:** Florian Oppermann  
[Florian.Oppermann@itp.uni-hannover.de](mailto:Florian.Oppermann@itp.uni-hannover.de)

**Erstprüfer:** Prof. Dr. Norbert Dragon  
**Zweitprüfer:** Prof. Dr. Domenico Giulini

**Abgabedatum:** 22. Oktober 2015



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>iii</b>
<b>Konventionen und Notation</b>	<b>v</b>
<b>1 Induzierte Darstellungen</b>	<b>1</b>
1.1 Allgemeine Betrachtung . . . . .	1
1.2 Wellenfunktionen . . . . .	2
1.3 Existenz globaler Schnitte . . . . .	2
<b>2 (Alte) kovariante Quantisierung</b>	<b>5</b>
2.1 Klassische Theorie und naive Quantisierung . . . . .	5
2.2 Implementierung der Zwangsbedingungen . . . . .	7
2.3 Probleme und Lösungsansätze . . . . .	9
2.3.1 Wellenfunktionen mit Träger in Nullmengen . . . . .	9
2.3.2 Unbeschränktes Energiespektrum . . . . .	9
2.3.3 Ursache und mögliche Lösung dieser Probleme . . . . .	9
<b>3 Quantisierung in statischer Eichung</b>	<b>11</b>
3.1 Eichfixierung und Quantisierung . . . . .	11
3.2 Hilbertraumstruktur . . . . .	12
3.2.1 Lorentztransformationen von Tachyonen . . . . .	12
3.3 Fehlinterpretation? . . . . .	13
<b>4 Lichtkegelquantisierung</b>	<b>15</b>
4.1 Lehrbuchansatz . . . . .	15
4.1.1 Klassische Mechanik . . . . .	15
4.1.2 Quantisierung . . . . .	16
4.2 Probleme und Lösungsansätze . . . . .	19
4.2.1 Zustände mit $p^+ = 0$ . . . . .	19
4.2.2 Negative Massenschalen . . . . .	20
4.2.3 Gedrehte Erzeuger . . . . .	21
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>23</b>
<b>Literatur</b>	<b>25</b>



# Einleitung

Die Quantentheorie einer freien Saite – Stringtheorie – wurde in den 1960er Jahren erstmals entwickelt. Insbesondere seit der „zweiten Superstring-Revolution“ Mitte der 90er Jahre gibt es große Hoffnungen, dass die Stringtheorie ein ernstzunehmender Kandidat für eine Theorie ist, die Gravitation und Quantentheorie vereint.

Wenngleich Quell zahlreicher interessanter Forschungen über Kompaktifizierungen und geometrische Strukturen ist die notwendige Existenz weiterer Raumzeitdimensionen (insgesamt 26 bzw. im supersymmetrischen Fall 10), die von der Stringtheorie vorhergesagt wird, eine Behauptung, die allen Beobachtungen widerspricht.

Ursprüngliches Ziel dieser Arbeit war deshalb, mithilfe der Theorie induzierter Darstellungen, die in den 60er Jahren von George Mackey entwickelt und danach von Physikern weitgehend ignoriert wurde, eine Formulierung der Stringtheorie zu finden, die auch in der üblichen vierdimensionalen Raumzeit Bestand hat.

Im Zuge dieser Betrachtungen zeigte sich jedoch, dass schon die übliche und in Lehrbüchern verbreitete Herleitung problematisch ist. Dazu sei zunächst allgemein festgestellt, dass eine relativistische Quantentheorie auf zwei wesentlichen Aspekten basiert [2]:

1. Zustände sind durch Strahlen in einem Hilbertraum gegeben, auf dem Messungen durch selbstadjungierte Operatoren und Wahrscheinlichkeiten für Messergebnisse durch Skalarprodukte gemäß der Grundgleichung<sup>1</sup>

$$w(i, A, \psi) = |\langle \Lambda_i | \psi \rangle|^2$$

gegeben sind.

2. In diesem Hilbertraum existiert eine unitäre Darstellung der Poincarégruppe,<sup>2</sup> also insbesondere für jede Lorentztransformation  $\Lambda \in SO(1, D - 1)$  ein Operator  $U_\Lambda$ , der Skalarprodukte invariant lässt.

In dieser Arbeit wird am Beispiel von drei Formalismen gezeigt, dass die Stringtheorie diese beiden Bedingungen nicht, oder nicht offensichtlich erfüllt. Dabei beschränke ich mich auf

---

<sup>1</sup>Dies ist die Wahrscheinlichkeit, den  $i$ -ten Messwert  $a_i$  des Operators  $A$  am Zustand  $\psi$  zu messen, wobei  $\Lambda_i$  der (eindeutige) Eigenzustand von  $A$  zum Eigenwert  $a_i$  sei.

<sup>2</sup>Genauer: Eine Darstellung der Überlagerungsgruppe der Zusammenhangskomponente der Identität.

## *Einleitung*

die Theorie des offenen, bosonischen Strings. Physikalisch akzeptable Stringtheorien implementieren zwar zudem Supersymmetrie, diese zusätzliche Struktur scheint die gefundenen Probleme jedoch nicht beheben, sondern höchstens verschleiern zu können.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Im ersten Kapitel wird die Theorie von induzierten Darstellungen kurz angerissen. Danach folgen die Betrachtungen der verschiedenen Zugänge zur Stringtheorie, die jeweils mit ihren Problemen und möglichen Lösungsansätzen dargestellt und schließlich im letzten Kapitel zusammengefasst werden.

# Konventionen und Notation

Die verwendeten Konventionen weichen teilweise von den in der Literatur üblichen ab, sie sollen deshalb hier kurz zusammengefasst werden.

**Einheiten** werden so gewählt, dass die Formeln einfach werden. Durchgängig gilt  $c = 1$  (Lichtgeschwindigkeit). Für die in der Stringtheorie auftretende Größe  $\alpha'$  wird der Wert  $1/2$  gewählt, dies hat  $T = 1/(2\pi\alpha') = 1/\pi$  und  $l = \sqrt{2\alpha'} = 1$  zur Folge.

**Die Signatur der Minkowski-Metrik** ist *mostly minus*, also  $(+, -, -, -)$ . Dadurch werden beliebig schwierig zu findende Vorzeichenfehler beim Vergleichen von Formeln ermöglicht, denn es reicht im Prinzip nicht aus,  $\eta$  durch  $-\eta$  zu ersetzen – für jedes Objekt muss von der Definition ausgehend geprüft werden, ob und wie die Metrik eingeht (Skalarprodukte, Indexstellung, etc.). In der hier betrachteten Theorie zeigt sich jedoch, dass alle auftretenden Objekte mit oberen Raumzeitindizes (abgesehen von der Metrik selbst) unter Konventionswechsel invariant sind.

**Lichtkegelkoordinaten** zeichnen die Raumrichtung  $X^1$  aus und werden asymmetrisch definiert,  $X^\pm = X^0 \pm X^1$ , was

$$(\eta^{..}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & \\ 2 & 0 & & \\ & & & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \text{und}$$
$$(\eta_{..}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & & \\ & & & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

für Indizes  $+, -, 2, \dots, D - 1$  impliziert.

**Indizes** heißen je nach ihrem Laufbereich unterschiedlich:  $\mu, \nu$  sind Raumzeitindizes,  $i, j, k, l$  durchlaufen nur die räumlichen Richtungen, im Abschnitt über die Lichtkegelquantisierung nur die transversalen Raumrichtungen  $2, \dots, D - 1$ .  $n, m$  sind natürliche oder ganze Zahlen.

## Konventionen und Notation

**Poisson-Klammern** zweier Funktionen  $f$  und  $g$  werden, um ihre Nähe zum Kommutator  $[A, B]$  zweier Operatoren zu betonen, mit  $[f, g]_P$  bezeichnet.

**Die unitäre Darstellung** einer Lorentztransformation  $\Lambda \in SO(1, D - 1)$  im Hilbertraum wird  $U_\Lambda$  genannt. Die Matrixdarstellung im Raum der  $D$ -Impulse heißt wie die Transformation  $\Lambda$ , die Matrixelemente werden mit  $\Lambda^\mu_\nu$  bezeichnet. Analog gilt dasselbe für Drehungen<sup>1</sup>  $D \in SO(n) \subset SO(1, D - 1)$ ,  $n \leq D - 1$ , die als Teilmenge der Lorentztransformationen aufgefasst werden.

**Das Symbol**  $\sum$ , zum Beispiel in

$$\sum_\mu |\eta^{\mu\mu}| = 1$$

bedeutet, dass über die explizit angegebenen oder sonst alle doppelt auftretenden Indizes *nicht* summiert werden soll. Andernfalls gilt die übliche Summenkonvention.

---

<sup>1</sup> $D$  kann sowohl die Zahl der Raumzeitdimensionen als auch eine Drehung bezeichnen. Die jeweilige Bedeutung ist dem Kontext zu entnehmen.

# 1 Induzierte Darstellungen

Die Theorie von induzierten Darstellungen basiert wesentlich auf den Theoremen von George Mackey [7]. Ich gebe hier nur die wesentlichen Punkte wieder, einen Auszug der Betrachtungen von Dragon [3]. Ausführlichere Betrachtungen finden sich auch bei Straumann [11], der allerdings den masselosen Fall ungenau behandelt.

## 1.1 Allgemeine Betrachtung

Das Ziel ist, eine lokal kompakte Gruppe  $G$  (wir denken an die Zusammenhangskomponente der Identität in der Lorentzgruppe) in einem Hilbertraum von Wellenfunktionen unitär darzustellen. Jede Massenschale  $\mathcal{M}$  kann als Orbit eines Referenzimpulses  $\underline{p}$  unter der Gruppe  $G$  verstanden werden. Ist die Stabilitätsgruppe  $H$ , die  $\underline{p}$  invariant lässt, eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ , so ist die Massenschale der Quotientenraum  $\mathcal{M} = G/H$ , der aus Linksnebenklassen  $gH$  besteht.

Wir nehmen an, dass  $R$  eine unitäre Darstellung von  $H$  im Hilbertraum  $\mathbb{C}^d$  ist, und betrachten den Raum  $\mathcal{H}_R$  der Funktionen  $\psi : G \rightarrow \mathbb{C}^d$ , deren Werte auf einer Faser bereits durch den Wert an einem Punkt festgelegt sind,

$$\psi(gh) = R(h^{-1})\psi(g). \quad (1.1)$$

Wählt man auf  $\mathcal{M}$  ein  $G$ -invariantes Maß  $d\mu$ , so definiert

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_{\mathcal{M}} d\mu(\underline{p}) (\psi(\underline{p}), \phi(\underline{p}))$$

ein Skalarprodukt, das  $\mathcal{H}_R$  zu einem Hilbertraum macht<sup>1</sup>. Es ist wohldefiniert, weil das Skalarprodukt  $(\psi(\underline{p}), \phi(\underline{p}))$  im  $\mathbb{C}^d$  wegen (1.1) und der Unitarität von  $R$  nur von der Faser abhängt.

Dann ist durch

$$(\mathcal{U}_g \psi)(s) := \psi(g^{-1}s), \quad g, s \in G \quad (1.2)$$

eine unitäre Darstellung von  $G$  auf  $\mathcal{H}_R$  gegeben, die durch  $R$  induziert ist.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Es muss noch die Mess- und Quadratintegrierbarkeit der Funktionen in  $\mathcal{H}_R$  vorausgesetzt werden.

<sup>2</sup>Die hier bisher vernachlässigte Inhomogenität in der Poincaré-Gruppe – also die Raumzeittranslationen – werden wie üblich multiplikativ durch  $(\mathcal{U}_a \psi)(s) = \exp(ip \cdot a)\psi(s)$  dargestellt, wobei  $\underline{p} = s\underline{p}$  gilt.

## 1.2 Wellenfunktionen

Um statt von Funktionen in  $\mathcal{H}_R$  von Funktionen der Massenschale  $\mathcal{M}$  reden zu können, wird folgende Konstruktion benötigt.

Ein *lokaler Schnitt* in einer Umgebung  $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{M}$  ist eine Abbildung

$$\sigma_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow G, \quad \sigma_\alpha(p)\underline{p} = p \quad \forall p \in \mathcal{U}_\alpha,$$

die also jedem Punkt  $p$  eine Transformation zuordnet, die  $\underline{p}$  auf  $p$  abbildet. Mit einer Überdeckung von  $\mathcal{M}$  durch solche Umgebungen  $\mathcal{U}_\alpha$  lassen sich Wellenfunktionen

$$\psi_\alpha := \psi \circ \sigma_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^d \tag{1.3}$$

definieren. Wegen (1.1) ist die Abbildung  $\psi \mapsto \{\psi_\alpha\}$  bijektiv.

Um die Darstellung (1.2) auf die Wellenfunktionen (1.3) zu übertragen, ist zunächst zu bemerken, dass für eine Transformation  $g \in G$  und  $p \in \mathcal{U}_\alpha$

$$g \sigma_\alpha(p) = \sum_{\beta} \sigma_\beta(gp) W_{\beta\alpha}(g, p)$$

gilt. Dabei ist  $\beta$  so, dass  $gp \in \mathcal{U}_\beta$  und die Wigner-Rotation  $W_{\beta\alpha}$  ist ein Element von  $H$ , das durch obige Gleichung definiert ist. (1.2) ist dann zu

$$(\mathbb{U}_g \psi)_\beta(gp) = \sum_{\alpha} R(W_{\beta\alpha}(g, p)) \psi_\alpha(p)$$

äquivalent.

## 1.3 Existenz globaler Schnitte

Um von Wellenfunktionen auf der Massenschale sprechen zu können, muss es nicht nur eine Überdeckung mit lokalen Schnitten, sondern einen globalen Schnitt geben. Das ist im allgemeinen nicht der Fall.

Das Bündel  $G$  mit der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = G/H$  und Fasern  $gH$  ist ein Prinzipal- oder Hauptfaserbündel.

Ob ein globaler Schnitt existiert ist damit auf die Fragestellung zurückzuführen, ob das Bündel trivial ist, das heißt ob topologisch

$$G = G/H \times H \tag{1.4}$$

gilt. [10, Kap. V.5]

### 1.3 Existenz globaler Schnitte

Weil sich jede Lorentztransformation in einen Boost und eine Drehung zerlegen lässt gilt hier  $G = \text{SO}(1, D - 1) = \mathbb{R}^{D-1} \times \text{SO}(D - 1)$ .

Die massiven Massenschalen haben die Stabilitätsgruppe  $H = \text{SO}(D - 1)$ ,  $\underline{p} = (1, \mathbf{0})$  und können topologisch mit  $\mathbb{R}^{D-1}$  identifiziert werden. Damit gilt (1.4) manifest und jede massive Massenschale erlaubt einen globalen Schnitt.

Für die masselose Massenschale gilt  $H = \text{E}(D - 2) = \text{SO}(D - 2) \times \mathbb{R}^{D-2}$ ,  $\underline{p} = (1, 1, 0, \dots)$  und  $\mathcal{M} = \text{S}^{D-2} \times \mathbb{R}$ . Damit ist (1.4) nach Abspalten der Faktoren  $\mathbb{R}^{D-1}$  zu

$$\text{SO}(D - 1) = \text{S}^{D-2} \times \text{SO}(D - 2)$$

äquivalent. Diese Gleichung gilt für  $D = 3, 5, 9$ , sonst nicht. [5, S. 293 f.]

Im tachyonischen Fall ist  $H = \text{SO}(1, D - 2) = \mathbb{R}^{D-2} \times \text{SO}(D - 2)$ ,  $\underline{p} = (0, 1, 0, \dots)$  und  $\mathcal{M} = \text{S}^{D-2} \times \mathbb{R}$ , demnach ist die Analyse analog zum masselosen Fall.



## 2 (Alte) kovariante Quantisierung

Die in diesem Abschnitt beschriebene Art, die Theorie der relativistischen Saite zu quantisieren, wird in der Literatur zumeist als Erstes behandelt. Sie wird mit dem Attribut *alt* versehen, um sie von den moderneren Methoden BRST- und Pfadintegralquantisierung abzugrenzen.

Die klassische Theorie wird hier nicht vollständig hergeleitet und begründet. Mithilfe klassischer Lehrbuchliteratur [4, 13, 14] sollten die verwendeten Begriffe und Formeln aber leicht nachvollziehbar sein.

### 2.1 Klassische Theorie und naive Quantisierung

Ausgangspunkt für die Quantisierung ist die klassische Formulierung, in der die Weltfläche der Saite durch Funktionen  $X^\mu(\sigma, \tau)$  parametrisiert wird. In der Polyakov-Wirkung

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d(\sigma, \tau) \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$$

wurde ein zunächst unabhängiges, zusätzliches Hilfsfeld, die Weltflächenmetrik  $h$ , eingeführt, die durch Ausnutzen der Reparametrisierungs- und Weyl-Invarianz flach gewählt wird,  $h = \eta$ . Aus der Wirkung folgen dann Bewegungsgleichungen für  $X^\mu$ , die durch die Modenzerlegung

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + p^\mu \tau + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (2.1)$$

mit  $x^\mu, p^\mu \in \mathbb{R}$  und  $(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu$  gelöst werden. Die Bewegungsgleichungen für das Hilfsfeld  $h$  führen auf Zwangsbedingungen<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = 0 &\Leftrightarrow T_{\pm\pm} = 0 \\ &\Leftrightarrow L_n := -\frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup> $T$  ist der Energie-Impuls-Tensor auf der Weltfläche. Mit  $\pm$  sind Lichtkegelkoordinaten  $\sigma \pm \tau$  auf der Weltfläche gemeint.

## 2 (Alte) kovariante Quantisierung

die zusätzlich erfüllt sein müssen. Die *Virasogeneratoren*  $L_n$  erfüllen die *klassische Virasoroalgebra*

$$[L_m, L_n]_P = -i(m-n)L_{m+n}.$$

Die in (2.1) auftretenden Variablen  $x^\mu, p^\mu =: \alpha_0^\mu$  und  $\alpha_n^\mu$  werden in der naiven Quantisierung zu unabhängigen Operatoren, die Realitätsbedingungen führen zur Selbstadjungiertheit von  $x$  und  $p$  und zur Beziehung

$$(\alpha_n^\mu)^\dagger = \alpha_{-n}^\mu.$$

Die Operatoren haben Vertauschungsrelationen, die aus den klassischen Poisson-Klammern folgen.

$$[x^\mu, p^\nu] = -i\eta^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = n\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

Alle anderen Kommutatoren verschwinden.

(2.3) ist die Heisenbergalgebra. Nach dem Stone-von-Neumann-Theorem [8] ist jede Darstellung der Heisenbergalgebra unitär äquivalent zu derjenigen, die auf dem Hilbertraum der quadratintegralen Impulswellenfunktionen<sup>2</sup> durch Multiplikation bzw. Ableitung wirkt.

(2.4) ist eine skalierte Erzeuger-Vernichter-Algebra unendlich vieler unabhängiger, D-dimensionaler harmonischer Oszillatoren. Ihre Darstellungen besitzen einen Grundzustand  $|\Omega\rangle$ , der von allen Vernichtern auf Null abgebildet wird,

$$\alpha_n^\mu |\Omega\rangle = 0 \quad \forall n > 0,$$

und aus dem durch Anwenden der Erzeuger  $\alpha_{-n}^\mu$  ( $n > 0$ ) eine Basis des Fockraums hervorgeht.

Arbeitet man mit diesen Fockraumbasiszuständen, so sind Zustände im Gesamthilbertraum (der also auch (2.3) berücksichtigt) durch einen impulsabhängigen Grundzustand  $|\Omega(p)\rangle$  mit einer quadratintegralen Wellenfunktion  $\Omega(p)$  gekennzeichnet, auf den die Erzeuger wirken. Typischerweise werden formale Zustände scharfen Impulses  $\tilde{p}$ ,  $\Omega_{\tilde{p}}(p) \sim \delta(p - \tilde{p})$ , verwendet und nur durch ihren Impuls benannt,  $|\tilde{p}\rangle := |\Omega_{\tilde{p}}\rangle$ .

Der so konstruierte Vektorraum enthält noch unerwünschte Zustände. So ist das Normquadrat von  $|\psi\rangle = \alpha_{-n}^\mu |\Omega\rangle$  durch

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \sum_{\mu, n} \langle\Omega|\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\mu |\Omega\rangle \\ &= \sum_{\mu} -n\eta^{\mu\mu} \langle\Omega|\Omega\rangle \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Die Wellenfunktionen hängen von allen D Impulsvariablen, insbesondere nicht nur von den räumlichen, ab und müssen in D Dimensionen quadratisch integrierbar sein.

## 2.2 Implementierung der Zwangsbedingungen

gegeben, also je nach Vorzeichen von  $\langle \Omega | \Omega \rangle$  für die Zeitrichtung oder für alle räumlichen Richtungen negativ.

Indes sind bislang auch die Zwangsbedingungen (2.2) nicht berücksichtigt, es ist also zu erwarten, dass nicht alle Zustände physikalisch sind.

## 2.2 Implementierung der Zwangsbedingungen

Die Interpretation von (2.2) als Operatoridentität ist für  $n = 0$  nicht eindeutig. Wir definieren Operatoren  $L_n$  im Hilbertraum durch Normalordnung,<sup>3</sup>

$$L_n := -\frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} : \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m :, \quad (2.5)$$

was nur die Definition von  $L_0$  verändert,

$$L_0 = -\frac{1}{2} (\alpha_0)^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m =: -\frac{1}{2} (\alpha_0)^2 + \mathcal{N}. \quad (2.6)$$

Der Operator  $\mathcal{N}$  heißt *Levelzahloperator* und zählt das Anregungsniveau im Fockraum,

$$\begin{aligned} [\mathcal{N}, \alpha_{-n}^\mu] &= n \alpha_{-n}^\mu, \\ \mathcal{N} |\Omega\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Diese Wahl der Operatorordnung ist willkürlich, mithin möglicherweise falsch. Jede andere Operatorordnung ließe sich aus (2.6) wegen der Vertauschungsrelationen (2.4) durch Addition einer reellen Konstanten zu  $L_0$  gewinnen.<sup>4</sup> Um dem Rechnung zu tragen, wird überall von  $L_0$  eine Konstante  $\alpha \in \mathbb{R}$  abgezogen, die zunächst beliebig ist.<sup>5</sup>

Die Definition (2.5) impliziert Vertauschungsrelationen, die sich von den Poisson-Klammern der klassischen Theorie unterscheiden,

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{D}{12} m (m^2 - 1) \delta_{m+n}. \quad (2.7)$$

Die naive Implementierung von (2.2) durch die Forderung

$$\begin{aligned} (L_0 - \alpha) |\psi\rangle &= 0 \\ L_m |\psi\rangle &= 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^* \end{aligned} \quad (2.8)$$

<sup>3</sup>Die Normalordnung schreibt Erzeuger  $\alpha_{-n}$  links von Vernichtern  $\alpha_n$  ( $n > 0$ ), d. h.  $:\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\mu := \alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\mu$ . Das stellt sicher, dass normalgeordnete Operatoren auf dem Fockraumgrundzustand sinnvoll definiert sind (endlich bleiben).

<sup>4</sup>Das gilt zumindest für jede, die Fockraumgrundzustände auf endliche Werte abbildet.

<sup>5</sup>Es wäre auch möglich, diese Konstante in die Definition von  $L_0$  aufzunehmen. Das ist aber nicht üblich.

## 2 (Alte) kovariante Quantisierung

an physikalische Zustände  $|\psi\rangle$  wäre zu stark, denn daraus folgte für  $m \in \mathbb{Z}^*$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_m \langle \psi | [L_m, L_{-m}] | \psi \rangle \\ &= \sum_m \langle \psi | 2mL_0 + \frac{D}{12} m(m^2 - 1) | \psi \rangle, \end{aligned}$$

was  $\langle \psi | \psi \rangle = 0$  impliziert. Stattdessen wird die Bedingung (2.8) zu

$$\begin{aligned} (L_0 - \alpha) | \psi \rangle &= 0 \\ L_m | \psi \rangle &= 0 \quad \forall m > 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

abgeschwächt. Wegen  $(L_m)^\dagger = L_{-m}$  gilt dann trotzdem

$$\langle \phi | L_m | \psi \rangle = 0 \quad m \in \mathbb{Z}^*$$

für Zustände  $|\phi\rangle$  und  $|\psi\rangle$ , die (2.9) erfüllen, das heißt, alle physikalischen Matrixelemente der  $L_m$  verschwinden, vergleichbar zur Gupta-Bleuler-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes.

Die erste der Bedingungen in (2.9) ist mit  $\alpha_0 = p$  und der Definition des *Massenquadrat-Operators*  $M^2 := p^2$  äquivalent zur Massenschalenbedingung

$$M^2 = 2(\mathcal{N} - \alpha) \tag{2.10}$$

auf physikalischen Zuständen.

Sie kann nicht als Operatoridentität (etwa  $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + 2(\mathcal{N} - \alpha)}$ ) gelten, weil  $x^0$  nach (2.3) mit jeder Funktion der räumlichen Impulse und der Erzeuger, nicht jedoch mit  $p^0$  vertauscht.

### No-ghost-Theorem

In der Literatur wird bewiesen [4, 9], dass für  $\alpha < 1$  und  $1 \leq D \leq 25$  sowie für  $\alpha = 1$  und  $1 \leq D \leq 26$  der Raum der physikalischen Zustände (der Unterraum, auf dem (2.9) gilt) frei von Zuständen mit negativem Normquadrat ist.<sup>6</sup> Im Folgenden wird  $\alpha = 1$  angenommen.

### Darstellung der Poincaré-Gruppe

In der kovarianten Theorie ist die Darstellung der Poincaré-Gruppe besonders einfach, weil alle Objekte Raumzeitindizes besitzen. Wellenfunktionen von Fockraumgrundzuständen transformieren über ihr Argument,

$$U_\Lambda |\Omega\rangle = |\Omega \circ \Lambda^{-1}\rangle,$$

<sup>6</sup>Dass es für  $\alpha > 1$  Zustände mit negativem Normquadrat gibt lässt sich leicht durch Beispiele zeigen.

und die Operatoren  $\alpha_n^\mu$  gemäß ihrem Raumzeitindex,

$$U_\Lambda^{-1} \alpha_n^\mu U_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \alpha_n^\nu.$$

## 2.3 Probleme und Lösungsansätze

### 2.3.1 Wellenfunktionen mit Träger in Nullmengen

Physikalisch sinnvoll sind Zustände mit scharfer Masse, also Eigenzustände von  $M^2$ . Nach (2.10) ist das gleichbedeutend dazu, die Zustände nach Levelzahl zu ordnen. Zu gegebener Levelzahl  $N$  schränkt (2.10) die Impulswellenfunktion auf eine  $D - 1$ -dimensionale Massenschale im  $(1, D - 1)$ -dimensionalen Minkowskiraum der Impulse ein, jede Massenschale ist jedoch bezüglich des  $D$ -dimensionalen Maßes eine Nullmenge. Eine Funktion, deren Träger in einer Nullmenge liegt, die also fast überall verschwindet, stimmt im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen mit der Nullfunktion überein.

Physikalische Zustände mit positiver Norm existieren nicht.

### 2.3.2 Unbeschränktes Energiespektrum

Nimmt man  $p^0$  als Energie des  $D$ -Impulsvektors ernst, dann hat  $x^0$  die Rolle eines *Zeitoperators*. Ist  $x^0$  selbstadjungiert, so existiert für  $a \in \mathbb{R}$  der unitäre Operator  $\exp(iax^0)$ , der Energieeigenzustände zum Eigenwert  $E$  auf solche zum Eigenwert  $E + a$  abbildet. Das Energiespektrum wäre kontinuierlich und nach unten unbeschränkt.

### 2.3.3 Ursache und mögliche Lösung dieser Probleme

Beide Widersprüche entspringen der Heisenbergalgebra (2.3), sie enthält – anders als in üblichen Quantentheorien – die Nullkomponente. Dies ist ein Zeichen unfixierter, unphysikalischer Freiheitsgrade der klassischen Theorie, die sich in Form von zusätzlichen unabhängigen Operatoren im Hilbertraum äußern.

Ein Ausweg könnte sein, diese Freiheitsgrade vor der Quantisierung zu fixieren – ein Vorgehen, das in den beiden folgenden Kapiteln beschrieben wird.



## 3 Quantisierung in statischer Eichung

Die in diesem Kapitel beschriebene Quantisierungsmethode wird in der Literatur selten behandelt (eine Ausnahme ist [6]), weil sie die Nachteile der kovarianten und der Lichtkegelquantisierung vereint. Sie korrigiert aber auf naheliegende Weise die Fehler, die im ersten Kapitel aufgezeigt wurden, und ist deshalb hier sinnvoll.

### 3.1 Eichfixierung und Quantisierung

Die Lösung (2.1) der klassischen Bewegungsgleichungen enthält noch Eichfreiheitsgrade, die durch Reparametrisierungen der Form  $\sigma^\pm \rightarrow \tilde{\sigma}^\pm(\sigma^\pm)$  gegeben sind. Der transformierte Weltflächenparameter  $\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^+ + \tilde{\sigma}^-)$  kann also als beliebige Lösung von

$$\partial_+ \partial_- \tilde{\tau} = \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \tilde{\tau} = 0 \quad (3.1)$$

gewählt werden.<sup>1</sup> Da die Weltflächenkoordinaten  $X^\mu$  genau dieselbe Gleichung erfüllen, kann man  $\tilde{\tau} = b_\mu X^\mu$  mit Konstanten  $b_\mu \in \mathbb{R}$  voraussetzen. Die Eichfreiheit kann also beispielsweise dadurch fixiert werden, dass man

$$X^0(\tau, \sigma) \sim \tau$$

wählt. Das führt in der Modenzerlegung (2.1) zu den Einschränkungen

$$\begin{aligned} x^0 &= 0, \\ \alpha_n^0 &= 0, \quad n \in \mathbb{Z}^*, \end{aligned}$$

die nicht als Bedingungen an physikalische Zustände, sondern als Operatoridentitäten implementiert werden und so die kritischen Nullkomponenten in (2.3) und (2.4) entfernen.

Bei der Quantisierung werden (2.6) und die Zwangsbedingung  $L_0 - a = 0$  zur Definition von  $p^0$  herangezogen,

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + 2(\mathcal{N} - a)}. \quad (3.2)$$

Die verbleibenden Zwangsbedingungen

$$L_m |\psi\rangle = 0, \quad m > 0 \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup> $\tilde{\sigma}$  ist dadurch dann ebenfalls festgelegt.

### 3 Quantisierung in statischer Eichung

sind als Bedingungen an physikalische Zustände zu lesen. Wegen (2.7) ist es äquivalent, diese Bedingung nur für  $m = 1, 2$  zu überprüfen.

## 3.2 Hilbertraumstruktur

Es gilt, die auf die räumlichen Komponenten eingeschränkten Vertauschungsrelationen (2.3), (2.4) darzustellen. Die naheliegende Konstruktion des Hilbertraums durch Wellenfunktionen  $\Omega(\mathbf{p})$  und die Fockraumbasis

$$|\Omega\rangle, \alpha_{-1}^k |\Omega_k\rangle, \alpha_{-1}^k \alpha_{-1}^l |\Omega_{kl}\rangle + \alpha_{-2}^k |\Omega_k\rangle, \dots \quad (3.4)$$

birgt jedoch Probleme.

Auf Grundzuständen lautet (3.2) mit  $a = 1$

$$p^0 |\Omega\rangle = \sqrt{\mathbf{p}^2 - 2} |\Omega\rangle, \quad (3.5)$$

$|\Omega\rangle$  ist also tachyonisch und die Wellenfunktion darf innerhalb der Sphäre  $\mathbf{p}^2 < 2$  keinen Träger haben. Insbesondere sind die Ortsoperatoren  $x^k$  auf dem Raum der tachyonischen Zustände zunächst nicht selbstadjungiert.

Für angeregte Zustände, beispielsweise  $|\psi\rangle = \alpha_{-2}^k |\Omega\rangle$ , unterliegt die Wellenfunktion  $\Omega$  a priori nicht dieser Einschränkung.<sup>2</sup> Dann ergibt sich jedoch der Widerspruch, dass auch

$$\alpha_2^k |\psi\rangle = \sum_k \alpha_2^k \alpha_{-2}^k |\Omega\rangle = 2 |\Omega\rangle$$

ein Element des Hilbertraums ist. In Abbildung 3.1 ist dieses Problem visualisiert.

### 3.2.1 Lorentztransformationen von Tachyonen

Wie aus (3.5) abzulesen und in Abbildung 3.1 zu sehen ist, ist die tachyonische Massenschale bei  $p^0 = 0$  abgeschnitten, sie besteht also nicht mehr aus allen Punkten, die durch Lorentztransformationen aus dem Standardimpuls  $\underline{\mathbf{p}} = (0, \sqrt{2}, 0, \dots)$  hervorgehen. Insbesondere wirken Lorentztransformationen nicht mehr natürlich auf Fockraumgrundzustände, die Gleichung<sup>3</sup>

$$U_\Lambda |\Omega\rangle = |\Omega \circ \Lambda^{-1}\rangle \Leftrightarrow U_\Lambda |\mathbf{p}\rangle = |\Lambda \cdot \mathbf{p}\rangle$$

gilt nicht.

<sup>2</sup> $|\psi\rangle$  ist nicht physikalisch. Das Problem tritt aber nicht nur bei nichtphysikalischen Zuständen auf, sondern auch bei physikalischen Zuständen der Form  $(\lambda_k \alpha_{-2}^k + \mu_{k1} \alpha_{-1}^k \alpha_{-1}^l) |\Omega\rangle$  mit einer geeigneten Wellenfunktion  $\Omega$  und Koeffizienten  $\lambda$  und  $\mu$ .

<sup>3</sup>Die Funktion  $\Omega(\mathbf{p})$  wird hier als Funktion  $\Omega(p)$  von D-Vektoren  $p$  auf der tachyonischen Massenschale  $p^2 = -2$  verstanden, damit ist  $\Omega \circ \Lambda^{-1}$  sinnvoll. Analog ist  $|\mathbf{p}\rangle$  als Schreibweise für  $|\underline{\mathbf{p}}\rangle$  zu verstehen.

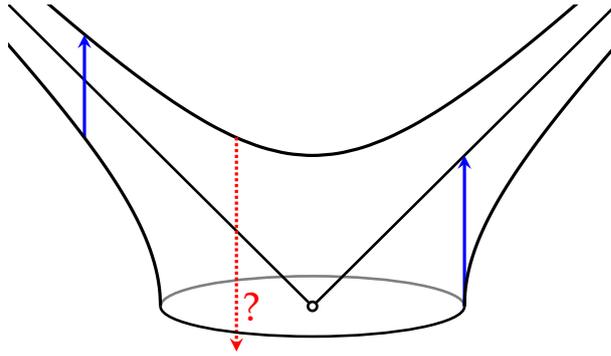


Abbildung 3.1: Die ersten drei Massenschalen (tachyonisch, masselos und massiv) mit den Übergängen, die Erzeuger  $\alpha_{-n}^k$  bewirken (blau). In rot und gepunktet ist ein „verbotener Übergang“ eingezeichnet, bei dem der Vernichter auf einen Zustand wirkt, der nicht in seinem Definitionsbereich liegt.

Insbesondere transformieren die Impulsoperatoren nicht wie Vektoren,

$$U_{\Lambda} p U_{\Lambda}^{-1} \neq \Lambda^{-1} \cdot p.$$

Dieses Problem ist offensichtlich darin begründet, dass durch räumliche Koordinaten stets nur eine Hälfte des einschaligen Hyperboloiden parametrisiert werden kann. Mit einer zweiten Kartenumgebung (und ggf. zwei weiteren für die „Nahtstelle“  $p^0 = 0$ ) ließe sich die gesamte Massenschale überdecken. Das passt zur Feststellung aus dem ersten Kapitel, dass tachyonische Zustände in den interessanten Dimensionen  $D = 4, 10, 26$  nicht durch Funktionen auf der Massenschale, sondern durch lokale Schnitte auf einem Teil der Massenschale gegeben sind.

### 3.3 Fehlinterpretation?

Die im obigen Abschnitt erläuterten Probleme treten auf, weil die Operatoren  $\alpha_n^k$  Zustände der massiven Massenschale auf die masselose oder tachyonische abbilden und umgekehrt. Nach der Analyse des ersten Kapitels sind diese Probleme zu erwarten.

Ein möglicher Ausweg scheint, die angeregten Zustände in (3.4) nicht als Resultat eines Operators, angewendet auf Grundzustände, zu lesen, sondern als unabhängige Basiszustände für die Unterräume des jeweiligen Anregungsgrads. Die  $\alpha_n^k$  dienen dann nur der Nummerierung dieser Basiszustände und Operatoren wie  $\mathcal{N}$  oder  $\alpha_{-n}^k \alpha_n^l$  (als Generator von Drehungen), die die Levelzahl nicht verändern, können durch ihre Wirkung auf die Basiszustände definiert werden, ohne dass  $\alpha_n^k$  als Operator existieren muss.

Die Operatoren  $L_n$ , die in der Physikalitätsbedingung (3.3) auftreten, vertauschen jedoch nicht mit dem Levelzahloperator und können daher nicht unmittelbar ohne die Operatoren

### 3 Quantisierung in statischer Eichung

$\alpha_n^k$  geschrieben werden. Schreibt man einen allgemeinen Zustand mit Levelzahl 2 (höhere Anregungen analog) als Integral über Zustände der Form

$$(\lambda_k \alpha_{-2}^k + \mu_{kl} \alpha_{-1}^k \alpha_{-1}^l) |p\rangle,$$

lassen sich aus (3.3) formal Bedingungen an die Koeffizienten, hier

$$\lambda_k + \mu_{kl} p^l = 0 \quad \text{und} \quad 2p^k \lambda_k + \mu_{kk} = 0,$$

herleiten, die unabhängig von den Operatoren  $L_m$  zur Definition von physikalischen Zuständen dienen können. Diese algebraischen Beziehungen müssen für jedes Level ausgerechnet werden.

Es ist damit schwieriger zu zeigen, dass Lorentztransformationen physikalische Zustände nicht unphysikalisch machen. Im Prinzip ist es aber denkbar, das formale Vorgehen aus [6] in eine Theorie zu übersetzen, die keine Abbildungen zwischen Massenschalen enthält.

Diese Interpretation hat einen wesentlichen Nachteil: Die Theorie wird langweilig, da sie in unabhängige Hilberträume zerfällt. Insbesondere könnte man nach Belieben einzelne Massenschalen aus der Theorie entfernen und die Einschränkung aller Operatoren auf den verbleibenden Hilbertraum ergäbe eine ansonsten unveränderte Theorie. Da Stringtheoretiker meistens nur an den masselosen Teilchen interessiert sind, ließe sich die Theorie ohne die Notwendigkeit komplizierter Projektionen darauf einschränken.

Die so entstehende Theorie hat mit üblichen Stringtheorien nicht viel gemeinsam. Dieses Vorgehen kann also nicht die Lösung der obigen Probleme sein.

## 4 Lichtkegelquantisierung

Die Idee der Lichtkegelquantisierung ist, dass *alle* unphysikalischen Freiheitsgrade vor der Quantisierung durch Eichfixierung entfernt werden. Der Hilbertraum der Quantentheorie enthält dann manifest nur noch physikalische Zustände, die sämtlich positive Norm haben. Der zu zahlende Preis ist die nicht offensichtliche Existenz einer Darstellung der Poincarégruppe.

Diese wird in Lehrbüchern durch „Raten“ der infinitesimalen Erzeugenden gezeigt, die Algebra gilt dann jedoch nur in 26 Raumzeitdimensionen. Andererseits könnte es möglich sein, eine induzierte Darstellung der Poincarégruppe (siehe Kapitel 1) auch in anderen Dimensionen zu konstruieren.

### 4.1 Lehrbuchansatz

#### 4.1.1 Klassische Mechanik

In der klassischen Theorie werden Lichtkegelkoordinaten  $X^\pm = X^0 \pm X^1$  eingeführt. Die *transversalen Richtungen*  $2, \dots, D - 1$  werden mit Vektorpfeilen  $\vec{p}$  bezeichnet. Sind alle räumlichen Richtungen gemeint, werden Vektoren  $\mathbf{p}$  fett gesetzt.

Zur Fixierung des verbleibenden Eichfreiheitsgrads wird nun als Reparametrisierung, die (3.1) erfüllt,  $\tau \sim X^+$  gewählt. Die Modenzerlegung

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + p^\mu \tau + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (4.1)$$

der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung enthält dann für  $X^+$  nur noch den Term

$$X^+ = p^+ \tau.$$

#### 4 Lichtkegelquantisierung

Nun können die Zwangsbedingungen (2.2) explizit gelöst werden. Sie führen auf

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta} = 0 &\Leftrightarrow T_{\pm\pm} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\partial_{\pm} X) \cdot (\partial_{\pm} X) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\partial_{\pm} X^+) (\partial_{\pm} X^-) - (\partial_{\pm} X^i) (\partial_{\pm} X^i) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \partial_{\pm} X^- = \frac{1}{p^+} (\partial_{\pm} X^i) (\partial_{\pm} X^i),
 \end{aligned}$$

das heißt in (4.1) sind  $p^-$  und die  $\alpha_n^-$  durch  $p^+$ ,  $p^i$  und die  $\alpha_n^i$  bestimmt, es verbleibt (für  $\mu = -$ ) nur  $x^-$  als unabhängiger Freiheitsgrad.

Explizit gilt

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i \quad (4.2)$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$ , wobei wieder  $\alpha_0^\mu := p^\mu$ .

#### 4.1.2 Quantisierung

##### Operatoreninhalt

Die eichfixierte Theorie wird „kanonisch quantisiert“, es existieren also folgende unabhängige Operatoren:

$$x^-, p^+, x^i, p^i, \alpha_n^i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = 2, \dots, D-1.$$

Die  $x$  und  $p$  sind selbstadjungiert, für  $\alpha$  gilt  $(\alpha_n^i)^\dagger = \alpha_{-n}^i$  und es gelten folgende Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
 [x^j, p^k] &= -i\eta^{jk} = i\delta^{jk}, \\
 [x^-, p^+] &= -i, \\
 [\alpha_m^j, \alpha_n^k] &= n\delta_{m+n}\eta^{jk} = m\delta_{m+n}\delta^{jk},
 \end{aligned}$$

alle anderen Kommutatoren verschwinden.

Die Gleichung (4.2) enthält für  $n = 0$  eine Operatorordnungsambiguität. Deshalb wird die folgende Gleichung zur Definition verwendet.

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : - 2a\delta_{n,0} \right), \quad a \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

Die klassische Gleichung

$$M^2 = p^2 = p^+ p^- - \vec{p}^2 \quad (4.4)$$

wird nun zur Definition des Operators  $M^2$  erhoben, für den

$$M^2 = 2(\mathcal{N} - a) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{N} = \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i$$

folgt.  $\mathcal{N}$  ist die Einschränkung des Levelzahloperators aus (2.6) auf die transversalen Erzeuger. Die Massenschalenbedingung (4.4) gilt damit manifest für alle Elemente des Hilbertraums.

## Hilbertraumstruktur

Vergleichbar zu den vorigen Kapiteln wird die Heisenbergalgebra durch Impulswellenfunktionen  $\psi(p^+, \vec{p})$  auf  $\mathbb{R}^{D-1}$  dargestellt, auf denen die Ortsoperatoren  $x^-, \vec{x}$  wie Ableitungen wirken. Der Fockraum entsteht dadurch, dass die transversalen Erzeuger  $\alpha_{-n}^j$  auf Grundzustände angewendet werden.

Die Erzeuger vertauschen mit den Argumenten der Wellenfunktionen, der Gesamtimpuls hängt jedoch wegen (4.4) über  $p^-$  mit der Levelzahl  $\mathcal{N}$  – und damit mit den Erzeugern  $\alpha$  – zusammen.

Durch die Ortsoperatoren  $x^-, x^i$  werden Translationen im Impulsraum implementiert. Beispielsweise gilt

$$\left( e^{iax^-} \psi \right) (p^+, \vec{p}) = \psi(p^+ + a, \vec{p}), \quad (4.5)$$

der Hilbertraum lässt sich also insbesondere nicht auf Funktionen  $\psi$  mit Träger im Bereich  $p^+ > 0$  einschränken.

## Darstellung der Poincaré-Gruppe

Die Poincaré-Gruppe besteht aus Lorentztransformationen und Raumzeittranslationen. Letztere sind bereits implementiert: Die infinitesimalen Translationen gehören definitionsgemäß zu den Impulsoperatoren. Insbesondere ist durch (4.2) und  $p^0 = (p^+ + p^-)/2$  der Erzeuger freier Zeitentwicklung, der Hamiltonoperator, gegeben.

Die Form für die Erzeugenden der Lorentztransformationen wird aus der Analogie zur klassischen Theorie abgeleitet. Dort findet man

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n>0} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu). \quad (4.6)$$

## 4 Lichtkegelquantisierung

Die Lorentzalgebra

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\lambda}] = -i\eta^{\nu\rho}M^{\mu\lambda} + i\eta^{\mu\rho}M^{\nu\lambda} + i\eta^{\nu\lambda}M^{\mu\rho} - i\eta^{\mu\lambda}M^{\nu\rho},$$

insbesondere die Gleichung  $[M^{-i}, M^{-j}] = 0$ , ist dann nur erfüllt, wenn  $D = 26$  und  $\alpha = 1$  gilt. [1, S. 59 ff.]

Ob es möglich ist, die Lorentzalgebra mit Erzeugern anderer Form darzustellen und ob dann auch Einschränkungen an  $D$  vorliegen, ist unklar. Dass  $\alpha = 1$  sein muss, kann aber auch anders hergeleitet werden:

Nach Wigners Klassifizierung [15] der irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe fallen die Zustände zu einer festen Masse in irreduzible Darstellungen der jeweiligen Stabilitätsgruppe.<sup>1</sup>

- Tachyonische Zustände,  $p^2 < 0$ :  $SO(1, D - 2)$
- Masselose Zustände,  $p^2 = 0$ :  $E(D - 2)$  (Euklidische Gruppe)  
Jede endlichdimensionale, unitäre Darstellung der Euklidischen Gruppe stellt die Translationen trivial dar. Für unsere Zwecke ist die Stabilitätsgruppe also gleich  $SO(D - 2)$ .
- Massive Zustände,  $p^2 > 0$ :  $SO(D - 1)$

Die einfach angeregten Zustände  $\alpha_{-1}^j |\Omega\rangle$ , von denen es genau  $D - 2$  gibt, sollen unter transversalen Drehungen  $D \in SO(D - 2)$  ineinander transformieren, wie es das Indexbild angibt (als Vektoren),

$$U_D \left( \alpha_{-1}^j |\Omega\rangle \right) = D^j_k \alpha_{-1}^k |\Omega \circ D^{-1}\rangle.$$

Die einfach angeregten Zustände bilden also natürlicherweise eine Darstellung von  $SO(D - 2)$ , sie sind masselos. Daraus folgt  $\alpha = 1$ .

### Summe der natürlichen Zahlen

Häufig [4, S. 96, 13, S. 38f, 16, S. 75f] wird die Normalordnungs-konstante  $\alpha$  oder die Zahl der Raumzeitdimensionen durch folgende Argumentation hergeleitet.

Die Definition (4.3) berücksichtigt, dass gegenüber der klassischen Gleichung (4.2) Operatoren vertauscht wurden. Setzt man beide Ausdrücke für  $n = 0$  als Operatoridentitäten

---

<sup>1</sup>Die Stabilitätsgruppe ist diejenige Untergruppe der Lorentzgruppe, die einen Impuls der jeweiligen Massenschale invariant lässt.

gleich, so erhält man

$$\begin{aligned}
 2a &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (:\alpha_{-m}^i \alpha_m^i: - \alpha_{-m}^i \alpha_m^i) \\
 &= \sum_{m < 0} (\alpha_m^i \alpha_{-m}^i - \alpha_{-m}^i \alpha_m^i) \\
 &= \sum_{m < 0} [\alpha_m^i, \alpha_{-m}^i] \\
 &= \sum_{m < 0} -m \eta^{ii} = -(D-2) \sum_{m > 0} m.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Der Summe im letzten Ausdruck kann man den Wert  $-1/12$  zuweisen [12]. Zusammen mit  $a = 1$  führt das in der Tat auf  $D = 26$ .

Die Argumentation scheitert bereits am ersten Schritt. Die Konstante  $a$  wurde eingeführt, weil die *wahre* Operatorordnung bei der Quantisierung der Gleichung (4.2) zunächst nicht bekannt ist. Durch das Gleichsetzen von (4.2) mit (4.3) wird diese Unkenntnis ignoriert und (4.2) als richtige Operatoridentität vorausgesetzt.

Dass dies nicht richtig sein kann sieht man daran, dass  $\alpha_0^- |\Omega\rangle$  nur dann endlich bleibt, wenn wie in (4.3) normalgeordnete Operatoren verwendet werden.<sup>2</sup> Setzt man jedoch (4.2) als Operatoridentität ein, so tritt wieder genau dieselbe divergierende Summe wie in (4.7) auf. Grundsätzlich ist es kein Problem, wenn ein Operator auf einer Teilmenge des Hilbertraums nicht definiert ist, jedoch tritt diese Divergenz bei jedem Zustand auf, der durch Anwenden endlich vieler Erzeuger  $\alpha$  aus  $|\Omega\rangle$  hervorgeht, also bei allen interessanten.

## 4.2 Probleme und Lösungsansätze

### 4.2.1 Zustände mit $p^+ = 0$

Dadurch, dass die klassischen Lösungen (4.2) der Zwangsbedingungen in der Quantentheorie zu Operatordefinitionen (4.3) erhoben werden, ist insbesondere der physikalisch wichtige Operator

$$\alpha_0^- = p^- = \frac{1}{p^+} [2(\mathcal{N} - a) + \vec{p}] \tag{4.8}$$

und damit  $p^0$  und  $p^1$  nicht auf dem ganzen Hilbertraum erklärt.

So gilt für den formalen Zustand  $|\Omega_1\rangle$  mit  $\Omega_1(p^+, \vec{p}) \sim \delta(p^+ - \sqrt{2}) \delta(\vec{p})$ , der also nur

---

<sup>2</sup>Das ist der Grund, weshalb Normalordnung gerade so definiert ist.

#### 4 Lichtkegelquantisierung

Impuls in 1-Richtung hat,

$$p |\Omega_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p^+ + p^-) \\ \frac{1}{2}(p^+ - p^-) \\ \vec{p} \end{pmatrix} |\Omega_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} |\Omega_1\rangle,$$

und eine Drehung  $D \in SO(1, D-1)$  um den Winkel  $\alpha$  in der 1-2-Ebene, dass der gedrehte Zustand  $|\Omega'_1\rangle := U_D |\Omega_1\rangle$  den gedrehten Impuls besitzt,<sup>3</sup>

$$p |\Omega'_1\rangle = (D \cdot p) |\Omega_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} |\Omega_1\rangle. \quad (4.9)$$

Für  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  ist  $p^+ |\Omega'_1\rangle = 0$ . Wenn im Hilbertraum Drehungen implementiert sind, existieren auch Zustände mit  $p^+ \leq 0$ .

Die Operatoren  $p^-, p^0$  und  $p^1$  sind auf dem tachyonischen Niveau durch stetige Fortsetzung bei  $p^+ = 0$  definiert. Für angeregte Zustände,  $\mathcal{N} > 0$ , divergiert (4.8) für  $p^+ \rightarrow 0$ .

#### 4.2.2 Negative Massenschalen

Wählt man in (4.9)  $\alpha = \pi$ , hat also  $|\Omega'_1\rangle$  nur Impuls in negative 1-Richtung ( $p^+ = -\sqrt{2}$ ), so erzeugt  $\alpha_{-n}^i$  einen Zustand mit negativer Energie. Denn aus  $[p^i, \alpha_{-n}^j] = [p^+, \alpha_{-n}^j] = 0$  und

$$[p^-, \alpha_{-n}^i] = \frac{2}{p^+} [\mathcal{N}, \alpha_{-n}^i] = \frac{2n}{p^+} \alpha_{-n}^i$$

folgt

$$[p, \alpha_{-n}^i] = \frac{1}{2} [p^-, \alpha_{-n}^i] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n}{p^+} e^- \alpha_{-n}^i. \quad (4.10)$$

Erzeuger, die die Levelzahl um  $n$  erhöhen, verschieben den Impuls um  $n/p^+$  in Richtung von  $e^- = e^0 - e^1$ . In Abbildung 4.1 ist dargestellt, dass Erzeuger Zustände mit negativem  $p^+$  auf negative Massenschalen abbilden.

Aus Zuständen mit  $p^+ = 0$  erzeugen die Erzeuger Zustände mit undefiniertem Impuls. Dort findet der Sprung von den oberen auf die unteren Massenschalen statt, Erzeuger wirken hier unstetig.

Liest man die Gleichung (4.4) als Definition für  $p^-$ , so berechnet man<sup>4</sup>

$$[p^-, x^-] = \left[ \frac{1}{p^+}, x^- \right] (\vec{p}^2 + M^2) = i \frac{p^-}{p^+}.$$

<sup>3</sup>Diese Forderung ist sinnvoll, wenn  $p$  etwas mit den physikalischen Impulsen, also den Erzeugern von Raumzeittranslationen, zu tun haben soll.

<sup>4</sup>Mit  $0 = \left[ \frac{1}{p^+}, p^+, x^- \right]$ .

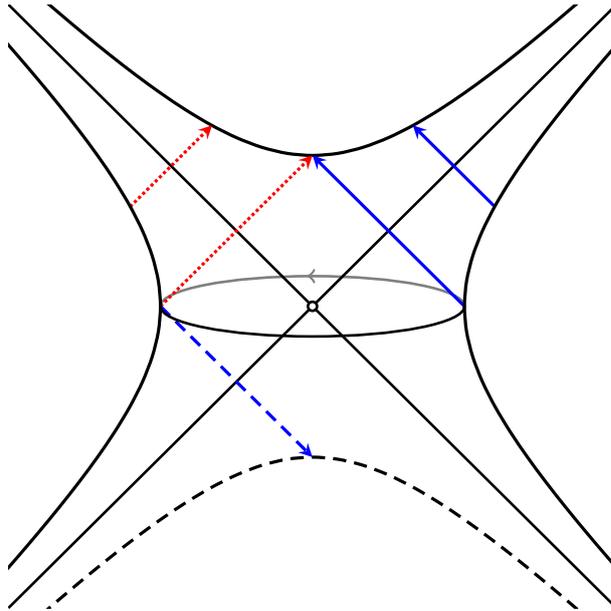


Abbildung 4.1: Die ersten drei Massenschalen (tachyonisch, masselos und massiv) mit den Übergängen, die Erzeuger  $\alpha_{-2}^i$  (blau, durchgezogen oder gestrichelt) bzw. um  $180^\circ$  gedrehte Erzeuger  $U_D \alpha_{-2}^i U_D^{-1}$  (rot, gepunktet) bewirken.

Die von  $x^-$  generierten Transformationen (4.5) ändern gleichzeitig  $p^+$  und  $p^-$  und lassen so das Massenquadrat invariant. Sie können von der positiven Massenschale auf die negative führen (Abbildung 4.2).

### 4.2.3 Gedrehte Erzeuger

Rechnet man mit formalen Impulseigenzuständen  $|p\rangle$ , bedeutet (4.9)

$$U_D |p\rangle = |D \cdot p\rangle \quad \text{oder} \quad U_D p U_D^{-1} = D^{-1} \cdot p.$$

Zusammen mit (4.10) folgt

$$[p, U_D \alpha_{-n}^i U_D^{-1}] = \frac{n}{(D^{-1} \cdot p)^+} D \cdot e^-.$$

Gedrehte Erzeuger verschieben den Impuls in die gedrehte  $e^-$ -Richtung.

In Abbildung 4.1 sind in rot die Übergänge eingezeichnet, die gedrehte Erzeuger auf Zuständen, die von nicht gedrehten auf negative Massenschalen abgebildet werden, bewirken.

Um keine Zustände auf negativen Massenschalen zu erhalten, müssten die Erzeuger auf Zustände mit  $p^+ > 0$  eingeschränkt werden. Es ist denkbar, mit Kartenumgebungen, die durch

#### 4 Lichtkegelquantisierung

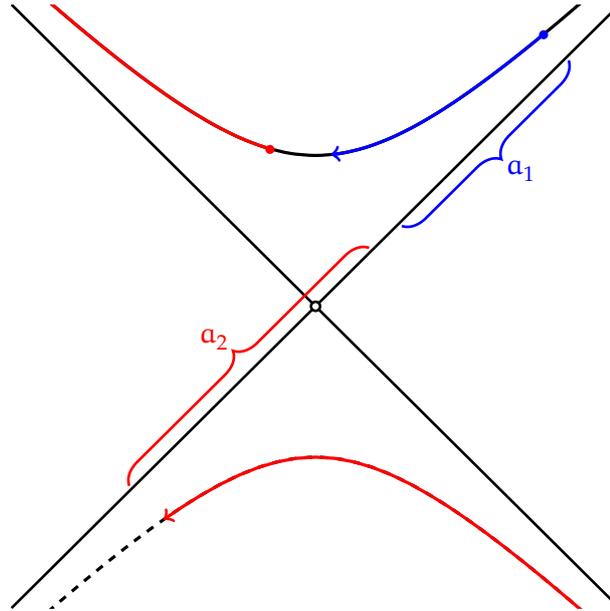


Abbildung 4.2: Von  $x^-$  erzeugter Fluss auf der ersten massiven Massenschale. Gezeichnet sind die endlichen Transformationen  $e^{-ia_1x^-}$  (blau) und  $e^{-ia_2x^-}$  (rot). Letztere bildet einen Zustand mit  $p^+ < a_2$  auf die negative Massenschale ab.

Drehungen aus dem Gebiet  $p^+ > 0$  hervorgehen, eine Überdeckung der tachyonischen Massenschale zu wählen, auf der jeweils die gleichsam gedrehten Erzeuger anstelle von  $\alpha_{-n}^k$  wirken. Dann entstehen per Konstruktion nur Zustände auf positiven Massenschalen.

Fraglich ist, ob sich die in der Lichtkegelformulierung übliche Konstruktion von infinitesimalen Lorentztransformationen (4.6) übertragen lässt, so dass einerseits auf jedem Kartengebiet tatsächlich nur die gedrehten Erzeuger wirken, andererseits Drehungen Zustände wirklich drehen und dass gleichzeitig die Lorentzalgebra überall erfüllt ist.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Die untersuchten Quantisierungsformalismen haben gemeinsam, dass sie keine physikalisch sinnvollen, konsistenten und relativistischen Quantentheorien beschreiben.

- Die kovariant quantisierte Theorie enthält keine physikalischen Zustände mit endlicher, nichtverschwindender Norm, weil in  $D$  Dimensionen quadratintegrierbare Wellenfunktionen auf  $(D - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten eingeschränkt werden, also fast überall verschwinden müssen.
- Der Hilbertraum der in statischer Eichung quantisierten Theorie hat Probleme mit dem Definitionsbereich der Operatoren  $\alpha_n^k$  – und damit der Generatoren der Lorentzgruppe.
- In der Lichtkegelformulierung gibt es Probleme mit Zuständen mit  $p^+ = 0$ . Außerdem existiert zu jeder positiven auch eine negative Massenschale, das Energiespektrum ist nach unten unbeschränkt.

Die Analyse des ersten Kapitels legt nahe, dass eine Theorie, in der Operatoren zwischen der masselosen und den massiven Massenschalen abbilden – eine wesentliche Besonderheit der Stringtheorie –, nur in den Raumzeitdimensionen  $D = 3, 5, 9$  existieren kann. Es ist allerdings festzuhalten, dass kein Beweis bekannt ist, dass solche Operatoren in anderen Dimensionen nicht existieren können – mir ist nur keine offensichtliche Möglichkeit bekannt, Wellenfunktionen der ganzen Massenschale auf lokale Schnitte abzubilden.

Wenn es gelänge, eine Quantentheorie der Saite zu formulieren, könnte die ursprüngliche Idee dieser Arbeit weiter verfolgt werden: Anstatt die Darstellung der Lorentzgruppe wie in der Lichtkegelformulierung oder der statischen Eichung [6] zu raten, kann man – eine Darstellung der Stabilitätsgruppen vorausgesetzt – mit Mackeys Theoremen eine induzierte Darstellung der Poincarégruppe konstruieren. Interessant wäre, ob dann ebenfalls eine Einschränkung an die Zahl der Raumzeitdimensionen auftritt.

Eine Abwandlung dieser Fragestellung ergibt sich, wenn man nicht die gesamte Lorentzgruppe darstellen möchte, sondern nur die Untergruppe der Transformationen in  $3 + 1$  Dimensionen, weil möglicherweise vorhandene weitere Raumdimensionen kompaktifiziert sind und die Poincaré-Symmetrie brechen, was lediglich bisher in Experimenten nicht nachgewiesen wurde.

Andere interessante Fragestellungen im Umfeld dieser Arbeit betreffen die klassischen

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Theorien. So sind beispielsweise die Probleme, die in der Lichtkegeltheorie bei  $p^+ = 0$  auftreten, bereits vor der Quantisierung zu sehen. Soweit bekannt wurde aber auch für die klassische Theorie noch keine Analyse eventuell notwendiger Kartenwechsel (z. B. gedrehte Lichtkegelkoordinaten) und der Auswirkungen davon auf die physikalischen Resultate durchgeführt.

# Literatur

- [1] Gleb Arutyunov. *Lectures on String Theory*. 2009. URL: <https://www.staff.science.uu.nl/~aruty101/lecture1.pdf>.
- [2] Norbert Dragon. *Anmerkungen zur Quantenmechanik*. 2015. URL: <https://www.itp.uni-hannover.de/~dragon/stonehenge/qm.pdf>.
- [3] Norbert Dragon. *Geometry of Special Relativity*. 2. Auflage<sup>1</sup>. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015.
- [4] Michael B. Green, John H. Schwarz und Edward Witten. *Superstring theory, vol. 1*. Cambridge University Press, 1987.
- [5] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780521795401.
- [6] George Jorjadze, Jan Plefka und Jonas Pollok. „Bosonic string quantization in a static gauge“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45.48 (2012), S. 485401. URL: <http://stacks.iop.org/1751-8121/45/i=48/a=485401>.
- [7] George Whitelaw Mackey. *Induced representations of Groups and Quantum Mechanics*. W. A. Benjamin, 1968.
- [8] John v. Neumann. „Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren“. In: *Mathematische Annalen* 104.1 (1931), S. 570–578. ISSN: 0025-5831. DOI: [10.1007/BF01457956](https://doi.org/10.1007/BF01457956).
- [9] Stephen Parrott. „The No Ghost Theorem in String Theory“. English. In: *Results in Mathematics* 21.3-4 (1992), S. 379–395. ISSN: 0378-6218. DOI: [10.1007/BF03323095](https://doi.org/10.1007/BF03323095).
- [10] Martin Schottenloher. *Geometrie und Symmetrie in der Physik*. vieweg, 1995.
- [11] Norbert Straumann. „Unitary Representations of the inhomogeneous Lorentz Group and their Significance in Quantum Physics“. In: (2008). arXiv: [0809.4942](https://arxiv.org/abs/0809.4942).
- [12] Terry Tao. *The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation*. Blog entry. 10. Apr. 2010. URL: <https://terrytao.wordpress.com/tag/euler-summation-formula/>.
- [13] David Tong. *Lectures on String Theory*. 23. Feb. 2012. arXiv: [0908.0333v3](https://arxiv.org/abs/0908.0333v3).
- [14] Peter West. *Introduction to Strings and Branes*. Cambridge University Press, 2012.
- [15] E. Wigner. „On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group“. English. In: *Annals of Mathematics*. Second Series 40.1 (1939), S. 149–204. URL: <http://www.jstor.org/stable/1968551>.
- [16] Kevin Wray. *An Introduction to String Theory*. Lecture notes. 2011. URL: [https://math.berkeley.edu/~kwrays/papers/string\\_theory.pdf](https://math.berkeley.edu/~kwrays/papers/string_theory.pdf).

---

<sup>1</sup>Erscheint voraussichtlich Ende 2015.